

## 數學函數 vs 物理運動

單維彰 · 2013 年 4 月

在高中的物理課，我們可能聽過「瞬間速度」。簡單的說，瞬間速度就是  $y = f(x)$  在  $x = a$  時的速度， $y$  代表位置， $x$  代表時間。

若是位置可以對應到數線上，我們就稱這是個**一維運動**<sup>1</sup>。自由落體便是一個例子，拿個東西鬆手，讓它只受地心引力影響地往下掉，那麼這個物體在每一個時間跟地面的距離就可以對應到數線上。但像是自由拋射物，我們就要分兩個維度來看，如果我們沒有將物體拋得太遠，就可以假設地面是水平的，在沒有受到側風干擾的情況下，那麼就可以想像，物體在空間中一個垂直於地面的平面上在運動。在這個運動軌跡的平面上，我們可以設一個鉛直的  $y$  坐標和一個水平的  $x$  坐標，這樣的運動在每一剎那的時間，有一個高度，也有一個從發射這點算起的水平距離，如此就可以分別對應到數線上，所以鉛直位移和水平位移就分別是一個一維運動。

有一些運動看起來不像是一維運動，但其實是。譬如在高速公路上面開車，雖然高速公路在是一條在三度空間中的曲線，但是只要訂了里程碑，則一輛車的某一個參考點在每一剎那的時間，它就位於高速公路的一個確定位置上，這個確定的位置如果用里程碑來當單位的話，它就可以對應到數線上。所以在高速公路上開車，車子的軌跡也可以理想化地變成一個一維運動。

考慮一維運動，我們可以發現，位置跟時間為  $y = f(x)$  的函數關係。所以  $y$  在時間  $[x, a]$  這一段時間<sup>2</sup>內的平均速度為  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ， $f(x) - f(a)$  為在這段時間內的位移， $x - a$  為時間差。

那什麼叫作「一瞬」的速度呢？可以說「一瞬」就是那一個時間嗎？但如果這樣說的話，那一瞬的速度就會產生尷尬的情況。因為平均速度  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  不容許  $x = a$ ，而我們憑著生活經驗知道，如果我現在正在動，那麼每一剎那我都在動，不會因為在很短的時間內拍了一張照片沒有動，就誤以為在整個時間都沒有動，所以我們不能夠用這個式子去算平均速度。

然而數學觀念為物理觀念提供了一個計算的方法，簡言之便是數學的極限觀念，使得式子為  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ，讓我們能在這個式子裡計算  $x = a$  的函數值。而此說法便解釋了物理上在  $a$  這個時間點的速度，於是在  $a$  這個時間點的瞬時速度，就可以求得出來了。而從數學的符號知道，此極限便是  $f$  在  $a$  這個時間點的導數，於是我們就曉得如何用微分的方式來解釋物理上的一些現象。例

---

<sup>1</sup>一個維度的運動。

<sup>2</sup>假設  $x < a$ 。

如：牛頓的自由落體<sup>3</sup>。

自由落體的關係式  $y = y(t)$ ， $y$  表示自由落體跟地面的距離(公尺)， $t$  表示時間(秒)， $y(t)$  表示隨著時間改變的一個一維運動。當時間是自變數時，一階導數的符號為  $y'(t) = \dot{y}$ ，此符號亦可稱為牛頓符號。我們知道位置對時間的變化率是速度，而代入一個時間點算出來的速度，我們稱為瞬時速度。所以  $\dot{y}$  仍是一個函數，是  $y$  對時間函數的一次導函數，對於任何一個時間點，我們可以在一次導函數算出一個值，那個值就是自由落體在那一瞬的速度。然而速度的變化率就是把速度再做一次微分，寫作  $\ddot{y}$ ，即為加速度。

牛頓的運動定律  $F = ma$  說到，力  $F$  正比於加速度  $a$ ，而任何的成正比都要有一個比例常數，在運動定律中，我們曉得那個常數就是質量  $m$ 。所謂自由落體就是只受地心引力影響，所以在地球表面大部分的地方，它有一個近乎常數的加速度，而這個加速度會是一個常數<sup>4</sup>  $g$ ，而為了表示他是在往下降的運動，故在常數前方加了負號，寫作  $\ddot{y} = -g$ 。根據我們對微分的認識，速度  $\dot{y}$  可以寫成  $\dot{y} = -gt + v_0$ ， $v_0$  為常數，即為初速度。那高度  $y$  可以寫成

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0,$$

其中  $y_0$  為常數，即為初始高度。

我們已經了解如何運用微分的基本公式和線性性質來做反過來的微分，且所謂自由落體的鉛直方向其加速度是常數  $-g$ 。如果這個自由落體一開始把物體往上拋，它到達一個最高點後掉下來，在最高點之前的那一點時間，它在上升，所以它的速度是正的；在最高點之後的那一點時間，它在下降，所以它的速度是負的。於是在最高點的時候速度要為 0，然後我們將速度為 0 算出來的時間再代入  $y$ ，我們便可以知道在什麼時間往上拋的自由落體會到達它的最高點。

---

<sup>3</sup>不受任何外力，只受地心引力的影響。

<sup>4</sup> $g$  的值大約是  $9.8 \text{ m/s}^2$ 。