大學入門微積分之結語

單維彰・2013 年 4 月

在上一章節，我們從瞬間速度和瞬間加速度，認識了微分如何提供物理上思考的一個模型。然而微積分不僅是解決了自由落體和自由拋射物等問題，也給了一整套的方法來實現在物理上思考的技巧。

我們以前學過一個量可以正比於另外一個量時，例如位置正比於時間就是等速運動；彈簧的恢復力正比於彈簧的變形。而一個量可以正比於它自己的變化率，記做 $y \propto y'$ 。但自由落體並非如此，從 $y'' = -g$ 中，我們可看出它並沒有跟自己成正比，所以這只是有了微積分以後所發現最初等的一個自然哲學應用。

當時牛頓提供另外一個更有趣的想法，現今我們稱它為**牛頓冷卻定律**。舉一個例子，從烤箱拿出一塊很熱的蛋糕出來，插上溫度計，我們曉得蛋糕最終只會降到跟室溫一樣的溫度，不會更低，這是一個性質上的認識。那麼量的認識呢？我們可以說就是它的溫度下降率，也就是每一分鐘蛋糕會下降多少度，寫作 $T = T(t)$ ， T 表示蛋糕的溫度($^\circ c$)， t 表示時間(分鐘)。當蛋糕很燙時，其一分鐘下降的溫度度數比接近室溫時一分鐘下降的溫度度數還多，也就是溫度的變化率正比於溫差，記做 $\dot{T} \propto (T - T_0)$ ， $\dot{T}$ 表示溫度對時間變化的速度，T_0 表示室溫。根據比例關係式，我們又可以寫成 $\dot{T} = -k(T - T_0)$ ，k 為大於 0 的比例常數，因為溫度在下降中，所以有一負號。而我們可再利用反過來的微分，求得 $T(t)$ ，但這個問題需要等到學了指數函數的微分後，才會深入探討。

不過我們現在已經看到了學微積分的幾個大方向，第一個就是透過微分，我們可以把很多種函數都寫成泰勒多項式，而且這個泰勒多項式最好使用升冪排列，也就是說在某一個時間或某一個數 a 的附近時，若不需要太準確，這個函數主要是由它的低次項來決定它在 a 這一點附近的函數值，這就是一個估計的想法。第二個是微積分基本定理，如果被積分的函數是速度，那麼積分就是速度函數底下的那塊面積，可以解釋成位移，而位移是位置函數的差，為結束的位置減掉剛開始的位置。而微積分基本定理經過一點點的變化，也就是在說微分跟積分互為反運算，所以在我們上述說的「反微分」，其實就是積分[1]。因此不論是在自然科學、社會科學或是金融經濟上，若某一個量跟它自己的變化率有某種正比關係的話，我們便可以利用微積分的技術把它算出來，當然很多問題就因此解決，所以這也是為什麼微積分對現代的科學這麼重要的原因。

[1]此積分即為不定積分。