

連續複利的年增率

單維彰・2014 年 4 月

我們已經知道複利的遊戲規則：如果年利率是 r ，譬如利率 3%，則 $r = 0.03$ 。如果每年計算利息 k 次，譬如每半年計息一次（郵局儲金）， $k = 2$ ，或者每個月計息一次， $k = 12$ ，則規定每次的利率都是 $\frac{r}{k}$ 。如果存入或投資的本金是 P ，而且一整年都不加碼也不提款，滋生的利息自動存入帳戶，繼續生息，則存滿一年後的本利和就是 $P \cdot (1 + \frac{r}{k})^k$ 。

年利率 r ，每年計息 k 次，存滿一年的本利和是 $P \cdot (1 + \frac{r}{k})^k$ 。

從存滿一年的本利和公式看得出來，一年後的本利和是原本存款的固定倍數： $(1 + \frac{r}{k})^k$ ，當然 r 和 k 都是正數，所以這個固定的倍數應該大於 1，稱為存款或投資的**年增率**。存款或投資的本金是我們自己量力而為的，年增率是我們要挑選的，當然是越大越好（實際狀況，還要考慮各種手續費）。

雖然跟本課程無關，但我們還是在此順便介紹**有效利率**。因為年增率是 1.多，其中 1 的部分就是我們的本金，後面的小數才是多出來的利潤。那一部份，稱為（存款或投資的）有效利率（貸款是另一種）。

例如，如果銀行公告的（年）利率是 3%，每年計息兩次，那麼年增率就大約是

$$(1 + \frac{0.03}{2})^2 = 1.030225 \approx 1.0302,$$

而有效利率就大約是 0.03022，也就是 3.022%，比公告利率高一點點。如果每年計息 12 次，那麼年增率就大約是

$$(1 + \frac{0.03}{12})^{12} = 1.030415 \dots \approx 1.0304,$$

所以有效利率就大約就是 3.041%，比一年計息兩次的有效利率再高一點點。

$$\text{存款或投資的有效利率：} (1 + \frac{r}{k})^k - 1$$

所以，看起來，固定公告利率 r ，只要每年計息的次數 k 提高，年增率也會提高，有效利率也會提高。這個趨勢看起來很好，如果每天計息一次，每年 365 次好不好？既然如此，那每個小時都計息一次，好不好？年增率會變得越來越大，那該多好！

有些銀行就推出「**連續複利**」的定期存款，意思是說每一分，每一秒，每一

剎那，都算利息給你。這個聽起來好得不能再好了。意思是說，每年計息無窮多次，用數學表示為

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k$$

那個「躺著的 8」符號表示（正的）無窮大，這個符號的意思是

當 k 越來越大，年增率 $\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k$ 會越來越接近的某個數（或永無止境的變大）

舉例來說，還是假設年利率為 3%，則連續利率的年增率就是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.03}{k}\right)^k。$$

我們令 $F = \left(1 + \frac{0.03}{k}\right)^k$ ，用電腦代入越來越大的 k 計算 F 的數值如下表。

k	$F = \left(1 + \frac{0.03}{k}\right)^k$
10	1.03040825...
100	1.03044989...
1000	1.03045407...
10000	1.03045448...
100000	1.03045452...
1000000	1.03045453...
10000000	1.03045453...

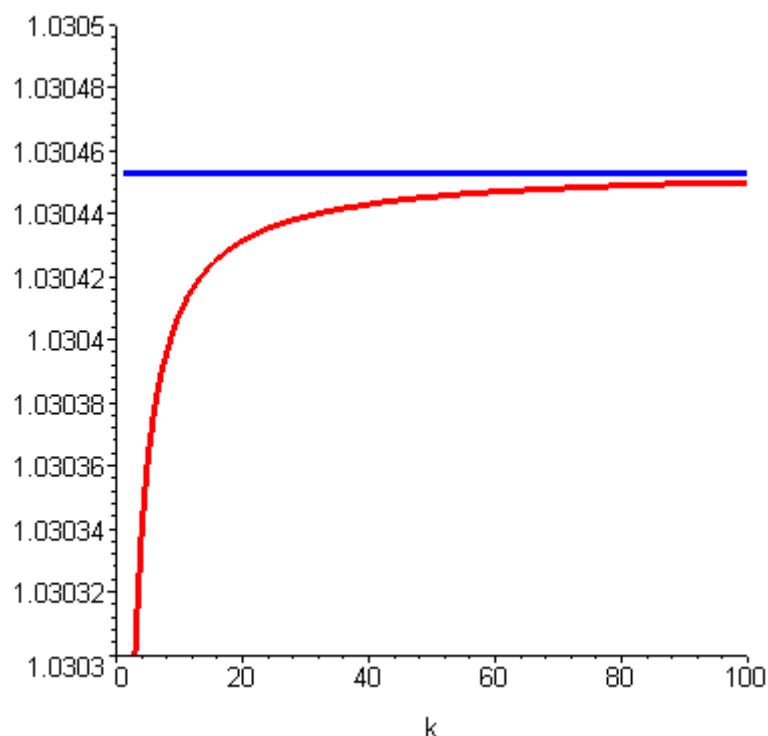
觀察計算出來的年增率 F ，它的確越來越大，但是大得越來越少，在小數點越來越後面才變大。可見年增率大約是 1.03045453：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.03}{k}\right)^k \approx 1.030454$$

所以，不要想得太美好了，連續複利並不會讓有效利率無限上揚，它大約是 3.045%，只比每個月計息一次的方案高了十萬分之四。

從另一方面來看，考慮 $F = \left(1 + \frac{0.03}{k}\right)^k$ ，當 k 越來越大， F 雖然也會越來越

大但是不超過一個極限，那個極限就是「水平漸近線」的概念。如下圖，橫軸是 k 的值，縱軸是 F 的值。觀察 F 的值的確逐漸變大，但是不會超過一個天花板，它就是水平線 $y=0.030454$ 。那條水平線就是 F 的漸近線。



但是，如果公告利率 r 不是 3%，前面計算的連續複利年增率就不靈了。有沒有更簡單的辦法呢？

我們用一個技巧，令 $k = nr$ ，亦即 $n = \frac{1}{r} \cdot k$ ，則年增率的極限裡面的式子 $(1 + \frac{r}{k})^k$

就巧妙地變成 $(1 + \frac{r}{nr})^{nr}$ ，然後化簡並以指數律改寫成 $\left[(1 + \frac{1}{n})^n \right]^r$ 。因為利率 r

是一個定數，所以 $k \rightarrow \infty$ 等同於 $n \rightarrow \infty$ ，與利率 r 無關。綜合而言，連續複利年增率可以改為以下的計算：

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{nr}\right)^{nr} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nr} \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^r \end{aligned}$$

所以現在需要做的極限是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。我們再用電腦算一次。這一次，我令

$F = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ，當 n 越來越大， F 的數值如下表：

n	$F = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
10	$(1.1)^{10} = 2.57374246\dots$
100	$(1.01)^{100} = 2.70481382\dots$
1000	$(1.001)^{1000} = 2.71692393\dots$
10000	$(1.0001)^{10000} = 2.71814592\dots$
100000	$(1.00001)^{100000} = 2.71826823\dots$
1000000	$(1.000001)^{1000000} = 2.71828046\dots$
10000000	$(1.0000001)^{10000000} = 2.71828169\dots$

由表可見

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\dots \approx 2.7183$$

這個極限將是非常重要的數學常數，我們給它一個符號 e ，也就是

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

為了避免跟中文的「一」讀音相同而產生困擾，建議大家將它讀作 e 。有了 $e \approx 2.7183$ 這個數學常數之後，

$$\text{連續複利的年增率：} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^r = e^r$$

我們用前面的例子來驗算一下：當公告的年利率是 3%，前面用 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.03}{k}\right)^k$ 計算的結果大約是 1.030454，而新的算法是

$$e^r \approx (2.71828)^{0.03} \approx 1.030454。$$

先後相等，驗算成功。

連續複利的年增率是一個以 e 為底的指數函數（自變數是年利率 r ）。這個常數是無理數，它的數值大約是 2.71828。這個常數，雖然是在討論複利的時候發現的，所以本來就是金融領域的常數，但是後來在科學和工程上都變得非常重要，使得它變得跟圓周率 π 一樣重要。十八世紀最多產的數學家歐拉 (Euler) 將

它命名為 e 。