指數函數的微分

單維彰・2014 年 3 月

給定底數$0<a\neq 1$的指數函數為$f(x)=a^x$。我先用$a=2$為例。回顧導函數的極限定義：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

代入$f(x)=2^x$之後，我們獲得以下的極限推論：

$$[2^x]'=\lim_{h\to 0}\frac{2^{x+h}-2^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2^x\cdot 2^h-2^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2^h-1)\,2^x}{h}$$

$$=\left[\lim_{h\to 0}\frac{(2^h-1)}{h}\right]\cdot 2^x$$

前面發現的主要事實是：$\mathbf{2^x}$的導函數$\mathbf{[2^x]'}$是某常數乘以它自己：**□ $\mathbf{2^x}$**。那個「某常數」就是以下極限：

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}$$

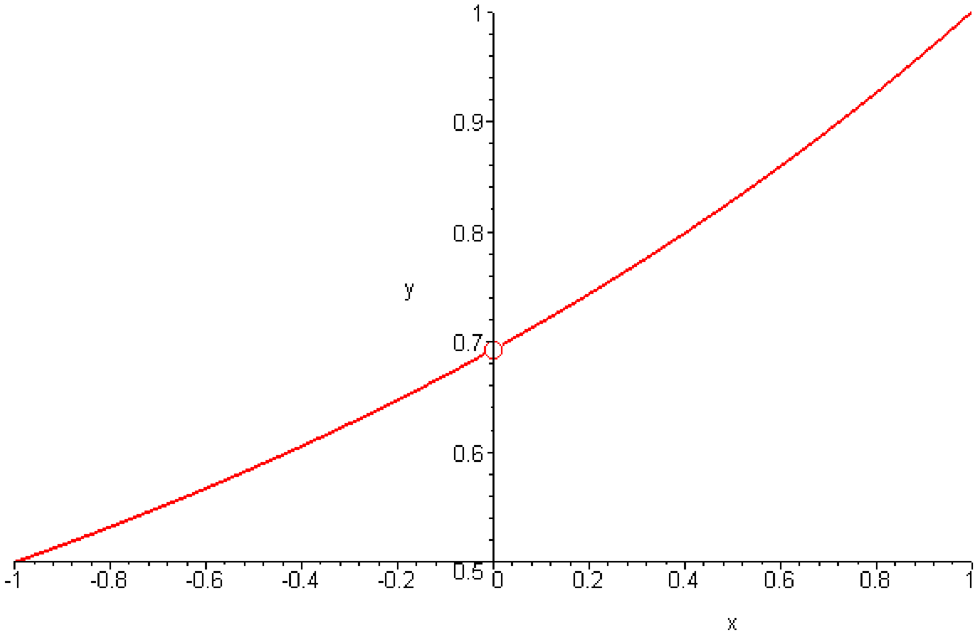
以前學習多項式的導函數時，遇到的極限問題是多項式的，可以用多項式的除法解決。現在我們遇到的極限問題不再是多項式，沒有「除法」計算可用了。但是極限的原理卻是一樣的：令

$$y=\frac{2^x-1}{x}$$

顯然y在$x=0$處不存在，而$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}$偏偏就是要求$y$在$x=0$處的值。觀察以下$y=\frac{2^x-1}{x}$的函數圖形，相信任何人都看得出來，根據$x\neq 0$之函數圖形的「趨勢」，圖中缺掉的$x=0$處的點（圖中的圓圈），有一個明顯的「高度」，也就是y值。所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$$

的意義就是圖中那個空心圓圈的 y 值。從圖已經可以看出來，極限略小於 0.7。



現在我們改變符號，討論

$$y=\frac{2^x-1}{x} \quad \text{而且要求的是} \quad \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$$

所謂 $x\to 0$ 可以分成 x 從 0 的右邊（正數）或者從左邊（負數）趨近於 0。數值的計算如下表：

x	y	x	y
0.100000	0.717734	-0.100000	0.669670
0.010000	0.695555	-0.010000	0.690750
0.001000	0.693387	-0.001000	0.692907
0.000100	0.693172	-0.000100	0.693123
0.000010	0.693149	-0.000010	0.693144
0.000001	0.693147	-0.000001	0.693146

用「夾擠定理」的想法，我們雖然不確定 $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$ 是多少？但是確定它的範圍是

$$0.693146 \le \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \le 0.693147$$

我們可以確定

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \approx 0.6931 \quad \text{或者} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.6931$$

現在我們知道 $f(x) = 2^x$ 的導函數是

$$[2^x]' = k \cdot 2^x \quad \text{其中} \quad k \approx 0.6931$$

簡記為

$$[2^x]' = 0.6931 \cdot 2^x$$ 。