標準指數函數的微分

單維彰・2014 年 3 月

明白了

$$[2^x]' = 0.6931 \cdot 2^x$$

之後（上述 0.6931 僅為近似值），我們知道常數 0.6931 來自於以下極限：

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

類似地，a^x 的導函數都是某係數乘以 a^x 自己：

$$[a^x]' = \left[\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \right] \cdot a^x \text{ ，其中 } 0 < a \neq 1$$

用同樣的手法，我們可以估計其他指數函數的導函數：

$$[2^x]' = 0.6931 \cdot 2^x$$
$$[3^x]' = 1.0986 \cdot 3^x$$
$$[4^x]' = 1.3863 \cdot 4^x$$
$$[5^x]' = 1.6094 \cdot 5^x$$

觀察底數和導函數的係數的關係：

底數	2	3	4	5
係數	0.6931	1.0986	1.3863	1.6094

顯然，係數隨著底數而遞增。我們大約可以猜想，應該有某個介於 2 和 3 之間的底數，使得它的係數就是 1。這意味著，這個特別的底數所形成的指數函數，它的微分就是它自己。這是一個超級簡單的公式，實在太方便了。這個最特別的底數，稱為指數函數的**標準底**，而這個特殊的指數函數，就稱為**標準指數函數**。

不賣關子，那個標準底就是大約 2.71828 而記作 e 的常數。標準指數函數就是

以 x 為年利率的連續複利年增率：e^x ，其中 $e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

也就是說

$$[e^x]' = e^x$$

為什麼 e^x 的微分會是它自己？這得要從兩方面來說。首先，從導函數的定義來看：

$$[e^x]' = \left[\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}\right]\cdot e^x$$

而恰恰好那個係數的極限是：

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

而另一方面，常數 e 本身也是從極限得到的：

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

如果我們令 $h=\frac{1}{n}$ ，那麼當 n 越來越大，當然 h 就越來越小，用符號來說，就是

$$n\to\infty \quad \Leftrightarrow \quad h\to 0$$

所以我們可以將 e 的定義改寫成 $h\to 0$ 的極限：

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{1/h}\right)^{1/h} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

不信的話，我們用電腦再算一次以上極限。令

$$k = (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

以下列出當 h 從 0 的右邊和左邊靠近 0 的時候，k 的對應數值：

h	k	h	k
0.100000	2.867972	-0.100000	2.593742
0.010000	2.731999	-0.010000	2.704814
0.001000	2.719642	-0.001000	2.716824
0.000100	2.718417	-0.000100	2.718146
0.000010	2.718295	-0.000010	2.718268
0.000001	2.718283	-0.000001	2.718280

由「夾擠」的概念，我們確定

$$2.718280 \le \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \le 2.718283$$

這樣應該可以相信 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e \approx 2.71828$ 了。

那麼，$[e^x]'$ 的係數就是

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^h-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^h-1}{h}$$ （這一步其實不太嚴謹，但沒錯啦）

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{\frac{1}{h}\times h}-1}{h}$$ （指數律）

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}1$$

$$=1$$

可見 $[e^x]'=e^x$ 。但我們建議同學直接記憶連鎖律的標準指數函數微分公式：

標準指數微分

$$[e^u]'=e^u\cdot u'$$

標準指數函數 e^x 的圖形長得什麼樣子呢？其實沒什麼特別，因為 $2<e<3$，所以 $y=e^x$ 的圖形就介於 2^x 與 3^x 之間。下圖的紅色曲線是 $y=e^x$ ，而藍色是 $y=2^x$ ，黑色是 $y=3^x$ 。