

反函數的微分

單維彰・2021 年 2 月

假如函數 $f(x)$ 有反函數（我們知道：如果 f 在定義域內為一對一函數，則它有反函數），而且如果我們知道反函數 $f^{-1}(x)$ 的代數表達式，那麼反函數的微分

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

就用現有的公式去計算即可。例如 $f(x) = x^2$ 在 $x \geq 0$ 範圍內有反函數 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ，它的導函數就是

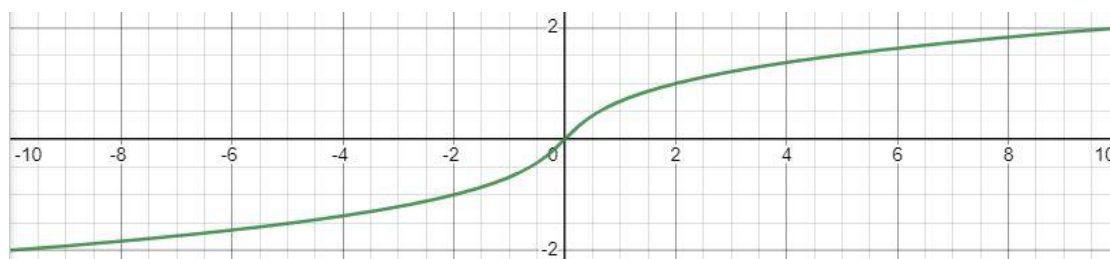
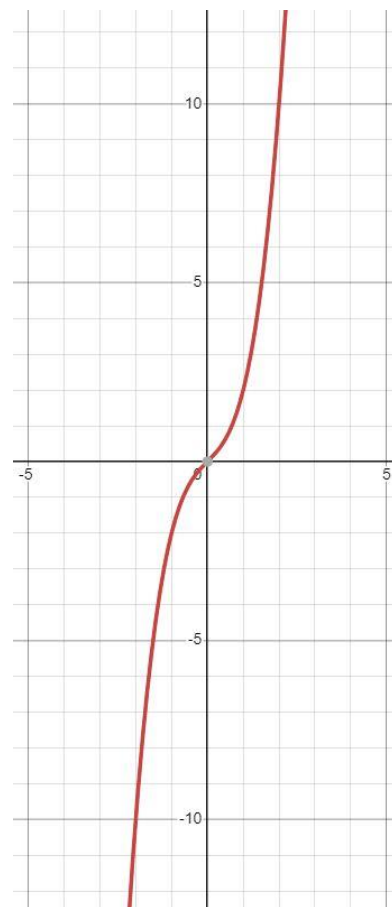
$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

可是，有些函數在概念上存在反函數，卻難算出反函數的代數式，而它理論上還是有切線的，因此應該是可以微分的。

例如函數 $f(x) = x^3 + x$ ，因為它嚴格遞增（因為它的導函數 $f'(x) = 3x^2 + 1$ 恆正）所以是一對一函數，從它的圖形（如右）也可以看出來：它同時符合鉛直線檢驗和水平線檢驗。所以在概念上 $f(x)$ 有反函數 $f^{-1}(x)$ ，但是我們不方便寫出 $f^{-1}(x)$ 的代數式。（用電腦代數系統，例如 **Maxima**，可以算出 $f^{-1}(x)$ 的代數式，可以看到它極為複雜。）

反函數 $f^{-1}(x)$ 的圖形是方程式 $y = f^{-1}(x)$ 的圖形，而它也是方程式 $f(y) = f(f^{-1}(x)) = x$ 的圖形，其實它就是 $f(x)$ 函數圖形對直線 $y = x$ 的鏡射。例如下圖是方程式 $x = f(y)$ $x = f(y) = y^3 + y$ 的圖形，它就是反函數 $f^{-1}(x)$ 的圖形。

因為 $f(1) = 2$ ，點 $(1, 2)$ 在 f 的圖形上，所以點 $(2, 1)$ 在 f^{-1} 的圖形上。從圖看得出來，反函數 $f^{-1}(x)$ 在點 $(2, 1)$ 的局部圖形應該像一條直線，也就是說 $f^{-1}(x)$ 在 $x = 2$ 處有切線，所以



也該有切線斜率。因此 $f^{-1}(x)$ 在 $x = 2$ 處應該可微，也就是我們可以算 $f^{-1}(x)$ 在 $x = 2$ 、 $y = 1$ 的導數。記作

$$\left. \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \right|_{(2,1)}$$

像這種情況，我們需要「反函數微分」技術。

「反函數微分」技術的關鍵是萊布尼茲符號的妙用：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

令 $y = f^{-1}(x)$ ，則 $\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{dy}{dx}$ 。可是 $x = f(y)$ ，所以 $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} f(y) = f'(y)$ ，注意 $f'(y)$ 那一撇表示對 y 的微分。

用前面的例子，當 $f(x) = x^3 + x$ ，則

$$\left. \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \right|_{(2,1)} = \frac{1}{f'(y)} \Big|_{(2,1)} = \frac{1}{[y^3 + y]'} \Big|_{(2,1)} = \frac{1}{3y^2 + 1} \Big|_{(2,1)} = \frac{1}{4}$$

事實上，前述關係也可以由對稱性而得。根據函數與反函數的原理，我們知道 $f(x)$ 和 $f^{-1}(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ 。也就是說，如果 $f(x)$ 的圖形通過 (x_0, y_0) ，則 $f^{-1}(x)$ 的圖形通過 (y_0, x_0) ，而 $f^{-1}(x)$ 在 y_0 處的切線，也就對稱於 $f(x)$ 在 x_0 處的切線：這兩條切線的斜率互為倒數。沿用前面的例子， $f^{-1}(x)$ 在 $x = 2$ 的導數，與 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處的導數互為倒數，而後者好算：

$$f'(1) = 3x^2 + 1 \Big|_{x=1} = 4$$

所以 $\left. \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \right|_{x=2} = \frac{1}{4}$ 。下圖是前述對稱關係的圖示。

