

自然對數與一般指數函數的微分

單維彰・2014 年 4 月

我們現在知道**標準指數** e^x 有個超級簡單的微分公式：

$$[e^x]' = e^x$$

但是那又怎樣？天下有那麼多指數函數，有 2^x 、 3^x 、 10^x 、 $(1.03)^x$ 、 $(0.98)^x$ 、 $(\frac{1}{2})^x \dots$

這麼多、各式各樣的底數，又不一定會是標準指數，這個超級簡單的微分公式，怎樣幫助它們做微分呢？

別擔心。對任意一個指數函數 a^x ，其中 $0 < a \neq 1$ ，總有一個係數 k 使得 $a = e^k$ ，也就是 $e^x = a$ 有唯一解 k 。所以

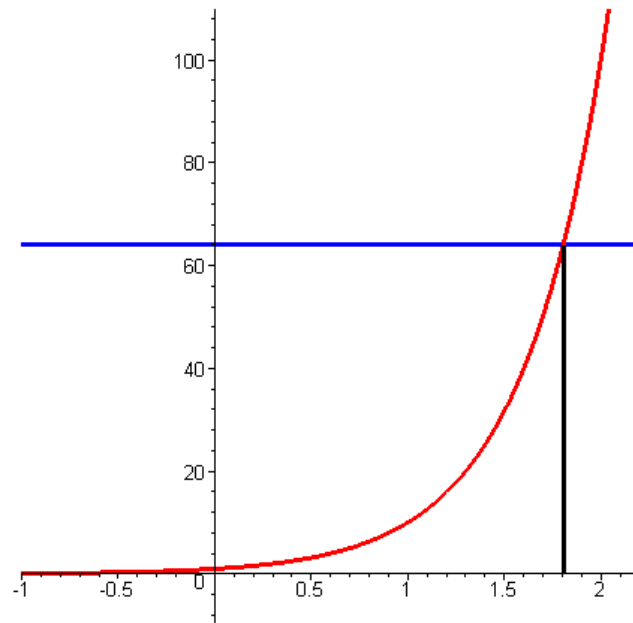
$$a^x = (e^k)^x = e^{kx}$$

也就是說每一個指數函數 a^x 都可以換成標準指數函數 e^{kx} 。用微分連鎖律就可以計算

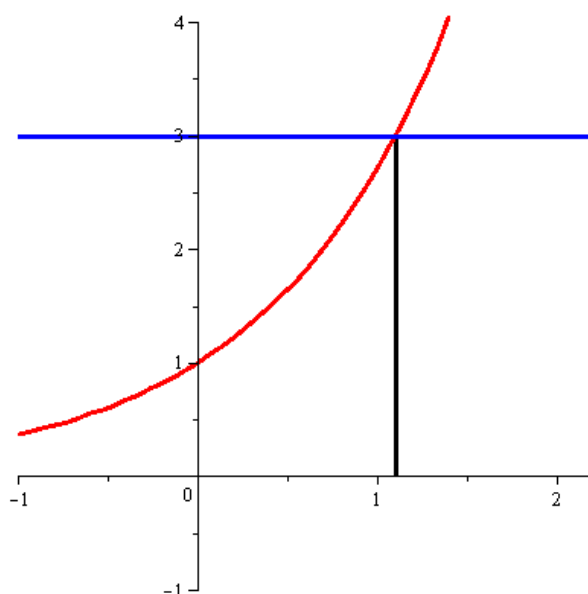
$$\begin{aligned} [a^x]' &= [e^{kx}]' \\ &= [kx]' e^{kx} = k e^{kx} \\ &= k a^x \end{aligned}$$

這就是我們已經知道的：指數函數的微分，都是某個常數乘以它自己。

以前學過對任意正數 $a \neq 1$ ，方程式 $10^x = a$ 有唯一解，如下圖，也就是指數函數 $y = 10^x$ 和水平線 $y = a$ 有唯一交點，交點的 x 坐標就是 a 的對數，記作 $\log a$ 。



現在的狀況非常類似，只是把 10^x 函數改成標準指數函數 e^x 。任給一個正數 a ，標準指數函數 $y = e^x$ 和水平線 $y = a$ 有唯一交點，如下圖，交點的 x 坐標對到誰？



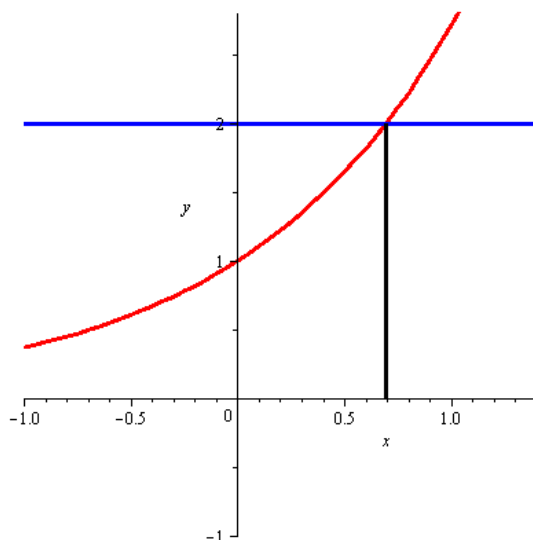
就像以前一樣，正數 a 對到的那個 x ，稱為 a 的對數。可是，從 10^x 對下來的數叫做對數，從 e^x 對下來的數也叫做對數，這樣會混淆。所以，以前學的對數，叫做**常用對數**，記作 $\log a$ 。而從標準指數函數 e^x 對下來的數，叫做**自然對數**，記作 $\ln a$ 。

說文解字：自然對數符號 $\ln$ 讀作 long，它是縮寫，來自拉丁文 *Logarithmus Naturalis*，其中 *Logarithmus* 是對數（名詞）的意思，而 *Naturalis* 是自然的（形容詞）。而自然對數的意思，就像以前 $\log a$ 的意思是 $10^{\log a} = a$ 一樣，只是把 10 的次方換成 e 的次方：

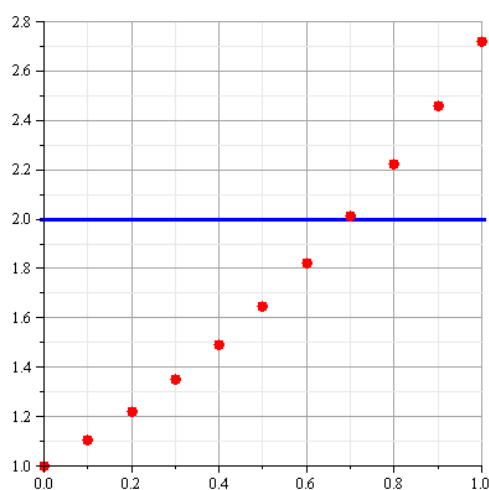
$$\text{對任意正數 } a, a = e^{\ln a}$$

就好像 $\sqrt{2}$ ， $\log 2$ 一樣， $\ln 2$ 是一個代數記號。 $\sqrt{2}$ 是方程式 $x^2 = 2$ 的正數解， $\log 2$ 是方程式 $10^x = 2$ 的解，而現在 $\ln 2$ 就表示方程式 $e^x = 2$ 的解。符號的意思清楚了，那它的數值怎麼估計呢？我們可以用電腦搭配「十分逼近法」來計算方程式的解。

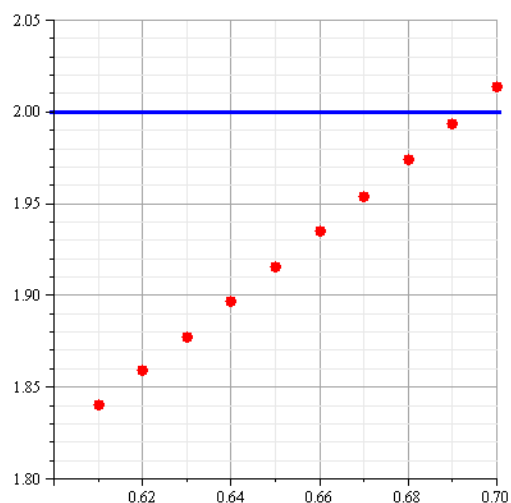
首先我們觀察以下圖形，發現 $\ln 2$ 顯然在 0 與 1 之間。所以 $\ln 2 = 0. \dots$ 。



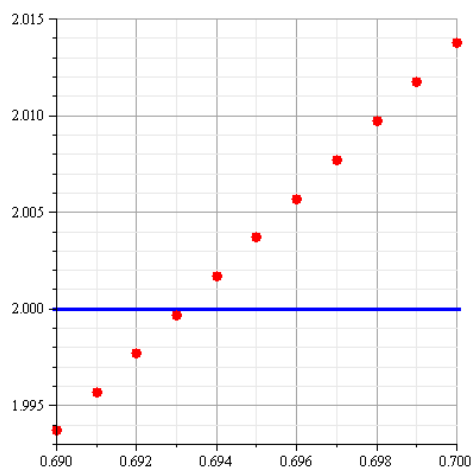
我們把 $[0,1]$ 之間的十分位小數 $0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$ (共 11 個數) 分別代入 e^x 算出 11 個點，畫出下圖，一看就很清楚： $e^{0.6}$ 還不到 2，但是 $e^{0.7}$ 超過 2 了。所以 $\ln 2 = 0.6\dots$ 。



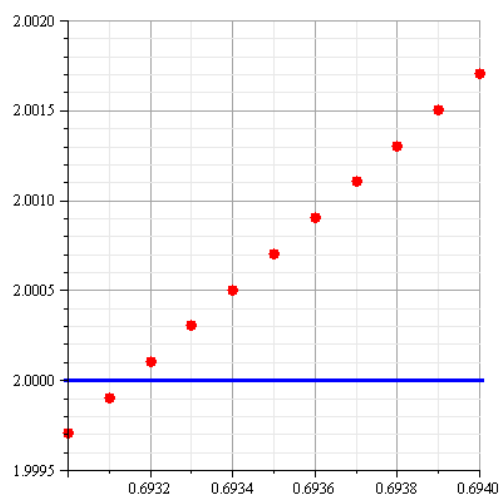
再把 $[0.6, 0.7]$ 之間的百分位小數 $0.60, 0.61, 0.62, \dots, 0.69, 0.70$ 分別代入 e^x 算出 11 個點，畫圖如下，觀察 $e^{0.69}$ 還不到 2，但是 $e^{0.7}$ 超過 2，所以這次發現 $\ln 2 = 0.69\dots$ 。



再把 $[0.69, 0.70]$ 之間的千分位小數 $0.690, 0.691, 0.692, \dots, 0.699, 0.700$ 分別代入 e^x 算出 11 個點，畫圖如下，觀察 $e^{0.693}$ 還不到 2，但是 $e^{0.694}$ 超過 2，所以這次發現 $\ln 2 = 0.693\dots$ 。



再做一次吧，把 $[0.693, 0.694]$ 之間的萬分位小數 $0.6930, 0.6931, 0.6932, \dots, 0.6939, 0.6940$ 分別代入 e^x 算出 11 個點，畫圖如下，觀察 $e^{0.6931}$ 還不到 2，但是 $e^{0.6932}$ 超過 2，所以這次發現 $\ln 2 = 0.6931\dots$ 。



夠了，我們可以說 $\ln 2 \approx 0.6931$ 。

同學們還記得，以前從微分的定義，用電腦算出來 $[2^x]'$ 是一個常數乘以 2^x ，而那個常數大約是 0.6931 嗎？也就是

$$[2^x]' = 0.6931 \cdot 2^x$$

現在我們知道為什麼了。因為 $2 = e^{\ln 2}$ ，所以 $2^x = e^{\ln 2 \cdot x}$ ，現在我們知道那個係數 k 就是 $\ln 2$ 。那麼

$$[2^x]' = \ln 2 \cdot 2^x$$

而 $\ln 2 \approx 0.6931$ ，所以得到以前的結果。

現在，我們正式得到了

一般指數函數的微分公式

$$[a^x]' = \ln a \cdot a^x, \text{ 其中 } a > 0$$