對數律

單維彰・2014 年 4 月

我們在高中，針對常用對數 log 學習的對數律，全部可以移植到自然對數 ln。但我們還是簡短複習一下。所有對數律的根本，就是

$$\text{對任意正數 } a\text{，} a = e^{\ln a}$$

乘法的對數律

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

原因是：令 a、b 為正數，則一方面 $a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)}$，另一方面 $a \cdot b = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$，所以 $e^{\ln(a \cdot b)} = e^{\ln a + \ln b}$，指數的部分相等，也就是 $\mathbf{ln}(a \cdot b) = \mathbf{ln}\, a + \mathbf{ln}\, b$。以上「證明」隱藏了一個假設：指數函數 e^x 是一對一函數，不過這件事非常符合直觀，而且是正確的，我們就不囉唆了。

從乘法的對數律，就能推論

除法的對數律

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

這是因為，隨便給兩個正數 a 和 b，如果 $\frac{a}{b} = c$ 則 $a = b \cdot c$。那麼，一方面 $\ln a = \ln b + \ln c$，移項得到 $\ln c = \ln a - \ln b$，但是 $\ln c$ 就是 $\ln \frac{a}{b}$，所以「分數的對數，等於分子的對數，減分母的對數」。

乘法的對數律最主要的貢獻就是推導出

次方的對數律

$$\ln a^x = x \cdot \ln a$$

原因是：任給一個正數 a，a^x 一方面可以根據定義寫成 $a^x = e^{\ln a^x}$，另一方面又可以先把 a 寫成 $e^{\ln a}$，所以

$$a^x = (a)^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

前後兩式的指數部分相等，就得到次方的對數律「a^x 的對數，等於 x 乘以 a 的對數」。

有了次方的對數律，我們就有了一支利器，可以用來對付指數方程式了。如果有一個指數方程式 $a^x = b$，其中 a 和 b 都是正數，x 是未知數。求解的辦法就是兩邊都取自然對數：

$$\ln a^x = \ln b$$

左側化為

$$x \cdot \ln a = \ln b$$

因此

$$x = \frac{\ln b}{\ln a} 。$$

當然，就像$\sqrt{2}$是$x^2 = 2$的解一樣，$\ln b$除以$\ln a$只是數學上的記號而已。實際的數值大約是多少？必須用電腦去算。