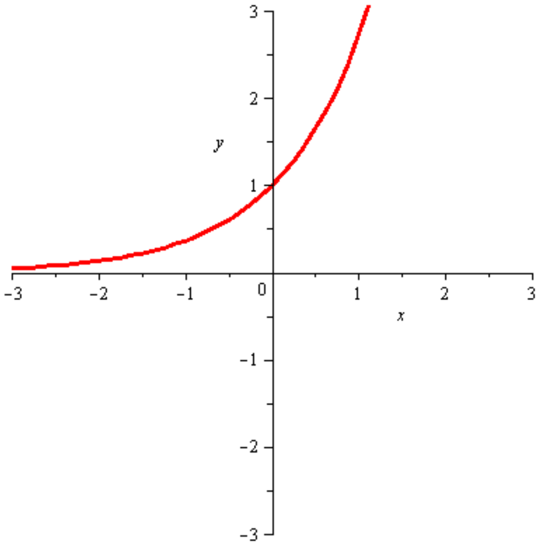
自然對數的圖形與微分

單維彰・2014 年 4 月

在這一支影片裡，我們說明自然對數 $\ln x$ 的函數圖形，以及它的微分公式。

首先，令函數 $y=\ln x$，等價的意義就是 $x=e^y$。我們知道 $y=e^x$ 的圖形，當橫軸表示 x，縱軸表示 y，注意 e^x 的值全是正數，所以 $y=e^x$ 的圖形只畫在第一和二象限。

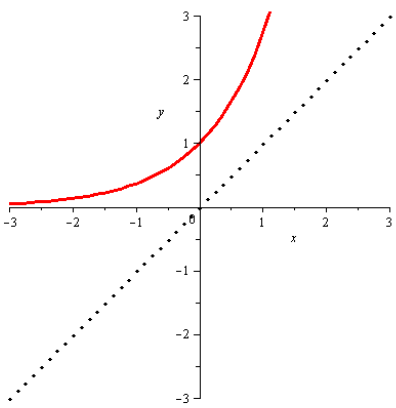
圖一：$y=e^x$ 的圖形，x 為橫軸，y 為縱軸



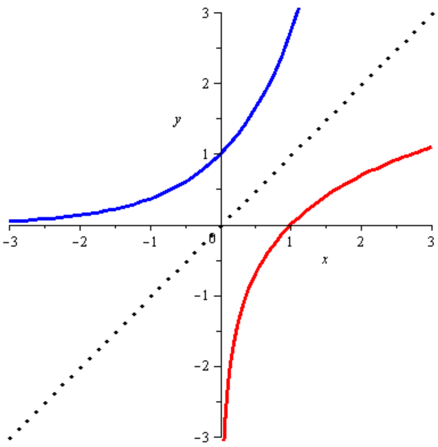
那 $x=e^y$ 的圖形是什麼呢？其實只要把自變數的符號從 x 換成 y，同時把應變數符號從 y 換成 x 而已。所以，其實是同一條函數曲線，只是換符號而已。但是剛才知道 $x=e^y$ 就是 $y=\ln x$ 的意思，所以現在大家看到的這條曲線，其實就是滿足 $y=\ln x$ 的所有點 (x,y) 聚集而成的曲線，它就是 $y=\ln x$ 的圖形。

所以，現在你看到的就是 $y=\ln x$ 的函數圖形嗎？幾乎就是了，但是還不是，否則自然對數和標準指數的圖形不就一樣了？還「不是」函數圖形的原因，是因為我們總有一個堅持：就是 x 要是橫軸，而 y 要在縱軸，但是現在 x 是縱軸，而 y 是橫軸。

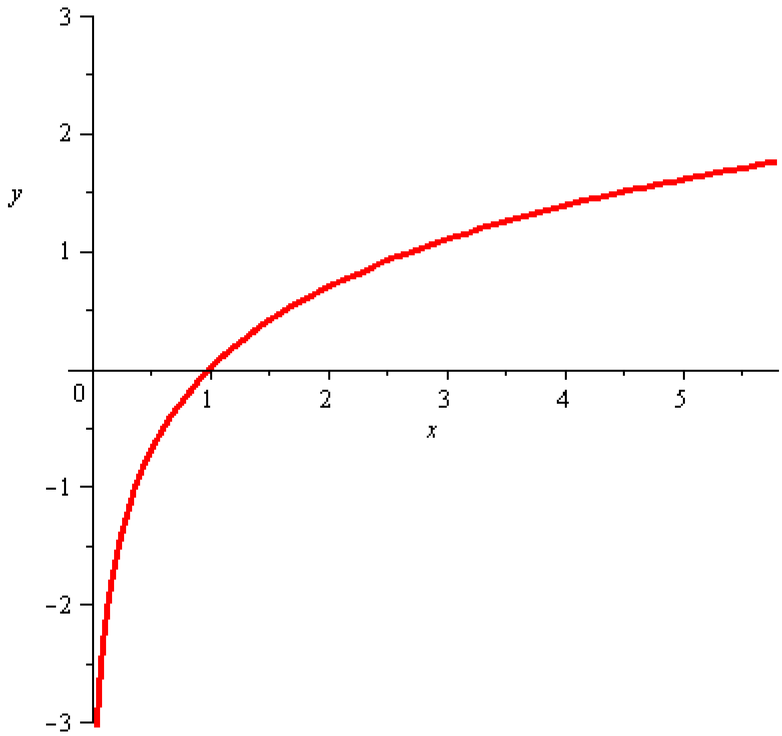
觀察下圖，應該可以看出來，我們須要以 $y=x$ 這條 45 度角的直線為對稱軸，做鏡射，或者翻轉。鏡射之後，縱軸就變成橫軸，而橫軸就變成縱軸，這就對了：x 為橫軸，而 y 為縱軸。



可是，鏡射之後，函數圖形就從第一、第二象限映設到第一、第四象限，如下圖。



以上的紅色曲線就是這就是 $y = \ln x$ 正確的函數圖形。換句話說，$y = \ln x$ 的定義域只有 $x>0$，所以函數圖形只落在右半平面；我們再看另一幅圖，顯示得比較清楚一點。



觀察 $y = \ln x$ 的函數圖形通過 (1,0)，在 1 的左邊是負的，在 1 的右邊是正的。它是嚴格遞增的函數，雖然它增加得很緩慢，但是畢竟沒有水平漸近線，它會緩慢地無限上升。當 x 從右邊靠近 0 的時候，$\ln x$ 是很小很小的負數，但是 $\ln 0$ 不存在，所以 $y = \ln x$ 的圖形不論多靠近 y 軸，它和 y 軸畢竟沒有交點。我們說 y 軸是 $\ln x$ 之函數圖形的**鉛直漸近線**。意思是說，$y = \ln x$ 的圖形會越來越靠近 y 軸，但永不相交。

接下來，我們做 $\ln x$ 的微分。我們現在不知道 $\ln x$ 的導函數是什麼，但是別

忘了我們會做標準指數的微分。利用 $y=\ln x$ 的等價關係 $e^y=x$，我們可以在等式兩側都做微分：

$$[e^y]'=[x]'$$

運用微分連鎖律，左邊就是 $y'\cdot e^y$ 而右邊是 1。而 y' 就是 $[\ln x]'$ ，e^y 就是 x，所以.可以改寫成

$$[\ln x]'\cdot x=1$$

那不就是說 $[\ln x]'=\dfrac{1}{x}$ 嗎？

注意 $\ln x$ 的定義域是正數，所以 x 本來就不會是 0，公式裡的 x 在分母是安全的。

現在，再搭配微分連鎖律，我們得到了自然對數的微分公式如下。

連鎖律之自然對數微分公式：

$$[\ln u]'=u'\cdot\frac{1}{u}=\frac{u'}{u}$$

一般對數的微分，則先用換底公式改成自然對數再微分。例如常用對數的微分是

$$[\log x]'=\left[\frac{\ln x}{\ln 10}\right]'=\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

而一般底的對數微分是

$$[\log_a x]'=\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$