指對數的微分應用

單維彰・2017 年 3 月

指對數函數的微分應用，就像多項式函數的微分應用一樣，完全沒有新的招式。

首先，微分的線性性質、乘法律、除法律和連鎖律，全都可以應用在指數和對數函數上。運用這些微分運算的規則，我們可以做任何牽涉代數函數、指數函數、對數函數的導函數。而對這樣的任意函數 $f(x)$ 以及一數 a，如果函數 f 在點 $(a, f(a))$「附近」的圖形像一條直線，則我們說函數 f 在 a 處**可微**，那條直線稱為**切線**，f 在 a 的**導數** $f'(a)$ 存在，其意義就是 $y = f(x)$ 之圖形在通過點 $(a, f(a))$ 處的切線斜率。

承上，函數 f 在 a 處的切線方程式為

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

將它改寫成一次函數的模樣：

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$L(x)$ 就稱為 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的**線性估計**或**一次估計**。

當導函數 $f'(x)$ 在 $x \in I$ 區間內 $f'(x) < 0$ ，則原函數 $f(x)$ 在 $x \in I$ 內遞減；而若 $f'(x) > 0$ 則原函數 $f(x)$ 遞增。發生 $f'(a) = 0$ 的點 a 稱為函數 f 的**臨界點**，函數 f 的相對極值都發生在臨界點上。

當二階導函數 $f''(x)$ 在 $x \in I$ 區間內 $f''(x) < 0$，則原函數 $f(x)$ 在 $x \in I$ 內向下彎或凹向下；而若 $f''(x) > 0$ 則原函數 $f(x)$ 向上彎或凹向上。發生 $f''(a) = 0$ 的點 $(a, f(a))$ 稱為函數 f 之圖形的**反曲點**。

微量或**微差**的符號仍是 dy 或 dx。萊布尼茲符號導出 $dy = f'(x)dx$ 。當自變數 x 發生一個差異量 Δx 時，應變數 y 發生相對的變異量

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

當 Δx 足夠小，假設 $\Delta y \approx dy$ ，則微量的估計法：

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

或者

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

舉一個例子：描繪 $y = xe^x$ 的圖形。首先發現它通過原點 $(0,0)$，而且因為 e^x 恆正，所以 xe^x 的圖形僅落在第三和第一象限。微分乘法律做一次導函數

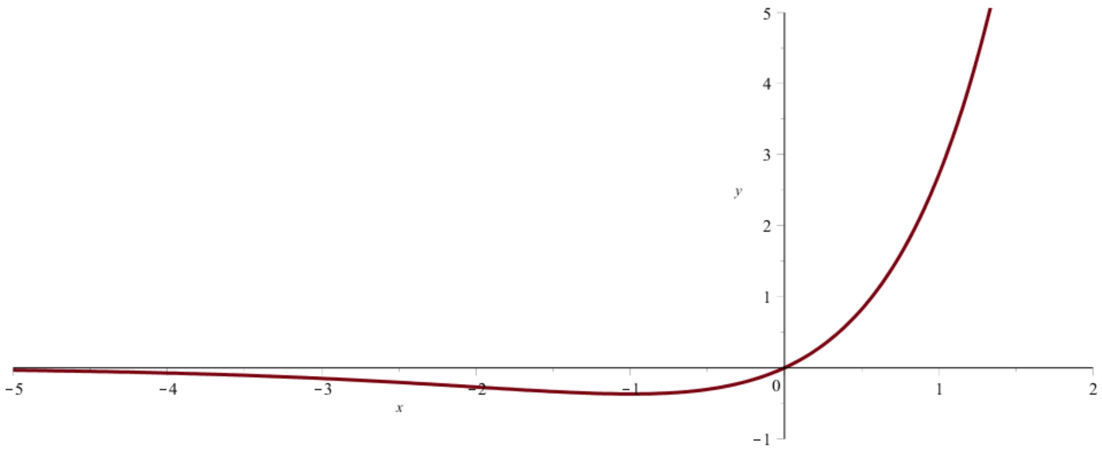
$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

找到臨界點 $x = -1$，而當 $x < -1$ 時 $y' < 0$ 故函數遞減，而當 $x > -1$ 時函數遞增。所以函數在 $x = -1$ 處發生相對極小值，函數的最低點是 $(-1, -e^{-1}) \approx (-1, -0.37)$ 。再

做二階導函數

$$y'' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

發現當 $x < -2$ 時函數圖形凹向下，而當 $x > -2$ 時函數圖形凹向上，函數圖形有一個反曲點發生在 $(-2, -2e^{-2}) \approx (-2, -0.27)$ 。因為圖形在左半平面恆負而且又要遞減到最低點 $(-1, -0.37)$ ，所以 x 軸負向將是它的漸近線。圖形描繪如下。



第二個例子。放射性物質碳 14 (C_{14}) 的半衰期為 5700 年，若某生物化石被測定所含 C_{14} 為現在環境含量的 17%，則推論該生物死亡多久了？而若 C_{14} 測定值有 ±1% 的誤差，則用微量估計推論它將導致多少年的推論誤差？

令化石體內 C_{14} 的相對含量為 C，則半衰期模型為

$$C = e^{-kt}, \quad t \ge 0 \qquad \text{（假定環境含量是 1）}$$

其中 t 表示生物死亡的時間，以「年」為單位。而半衰期決定了係數 k：

$$e^{-5700k} = \frac{1}{2} \quad \text{亦即} \quad k = \frac{\ln 2}{5700}$$

現在要求使得 $e^{-kT} = 0.17$ 的時間 T：

$$-kT = \ln 0.17 \quad \text{亦即} \quad T = -5700\frac{\ln 0.17}{\ln 2} \approx 14,570 \text{年}$$

在此前提下，以微量估計變異量的等式為

$$\Delta C = C'(0.17) \cdot \Delta t$$

現在根據 $|\Delta C| = 0.01$ 而求 $|\Delta t|$。因為 $C' = -kC$ ，所以當 $C = 0.17$ 的時候，$C'(0.17) = -0.17k$ 。如果 $|\Delta C| = 0.01$，則前式為

$$0.01 = 0.17k\,|\Delta t|$$

故

$$|\Delta t| = \frac{1}{17k} \approx 480 \text{年。}$$