

有理函數的反導函數一

單維彰・2014 年 11 月

所謂有理函數就是

$$f(x) = \frac{S}{P}, \text{ 其中 } P、S \text{ 皆為 } x \text{ 的多項式}$$

現在我們要原則性地認識

$$\int \frac{S}{P} dx$$

這種類型的積分方法。不失一般性的，我們可以假設 S/P 是一個「真分式」，也就是說 $\deg S < \deg P$ 。因為如果 S/P 是假分式，則可以用除法算出「帶分式」，例如

$$\frac{x^3 - 1}{x + 1}$$

是一個假分式，但因為 $(x^3 - 1) \div (x + 1) = (x^2 - x + 1) \dots - 2$ ，所以

$$\frac{x^3 - 1}{x + 1} = x^2 - x + 1 - \frac{2}{x + 1}$$

所以

$$\int \frac{x^3 - 1}{x + 1} dx = \int x^2 - x + 1 dx + \int \frac{2}{x + 1} dx$$

前面的多項式部份，肯定已經會積分了，只剩下後面的真分式需要討論。因此，我們可以假設 S/P 是「真分式」。

更進一步，我們可以假設 S 和 P 的「領導係數」也就是最高次項的係數都是 1；因為假設它們不是 1，可以「提出」係數到積分的外面。例如

$$\int \frac{2}{x + 1} dx = 2 \int \frac{1}{x + 1} dx$$

所以，如果 $f(x) = \frac{S}{P}$ 的分母 P 為一次式，根據前面不失一般性的假設，肯

定只有 $f(x) = \frac{1}{x - a}$ 的形式。根據以下

對數的連鎖律微分公式

若 u 是 x 的函數，則

$$[\ln u]' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'}{u}$$

我們得知

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x-a| + C$$

當 $f(x) = \frac{S}{P}$ 的分母 P 高於一次時，我們要做 P 的因式分解。這就是前面聲明現在只做「原則性地認識」的原因了：我們不打算投入很多時間練習多項式的因式分解。

在微積分裡面，我們只處理實係數多項式，也就是不討論虛根。限制在實數裡，任意 n 次多項式可以被分解成一次或二次因式，其中「二次因式」的意思是它不能再分解為兩個二次因式的意思。而「一次因式」包含「重複」的狀況，例如

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3(x^2+1)$$

其中 $(x-1)^3$ 是「重複」的一次因式，而 x^2+1 是二次因式。

假設同學們都知道「代數基本定理」：一個實係數 n 次方程式 $P=0$ 必有 n 個根，包含實根和虛根以及它們的重複。而虛根必定成對出現，所以虛根必定有偶數個（0 是偶數）。這份教材的標題是「一」，意思是只處理第一部份，也就是

$f(x) = \frac{S}{P}$ 的分母 P 滿足以下條件：

P 為領導係數為 1 的 n 次多項式，且 $P=0$ 有 n 個實根（包含重複的）

如果 $P=0$ 有虛根，就留到教材「二」再說。假設 $P=0$ 有 k 個相異實根 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 各重複 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 次，則 P 可以被分解成以下一次因式的乘積：

$$P = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} \cdots (x-a_k)^{n_k}, \text{ 其中 } n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

在以上情況，有理函數 $f(x) = \frac{S}{P}$ 可以拆解成一次因式的真分式，如以下形式：

$$f(x) = \frac{S}{P} = \frac{S_1}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{S_2}{(x-a_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{S_k}{(x-a_k)^{n_k}}$$

拆解之後的每一個分式都是真分式，亦即 $\deg S_1 < n_1$ 、 $\deg S_2 < n_2$ 、...、 $\deg S_k < n_k$ ，但分子的領導係數不見得是 1。像上面的拆解，稱為**分項分式**：它把一個分式拆解成好幾項的分式。

由此可見，（在「情況一」）有理函數的積分，可以拆解成分母僅為一次式之完整次方的真分式積分：

$$\int \frac{S}{P} dx = \int \frac{S_1}{(x-a_1)^{n_1}} dx + \int \frac{S_2}{(x-a_2)^{n_2}} dx + \cdots + \int \frac{S_k}{(x-a_k)^{n_k}} dx$$

所以，我們又可以不失一般性地僅考慮以下形式的有理函數積分：

$$\int \frac{S}{(x-a)^n} dx, \text{ 其中 } n \text{ 為正整數而 } \deg S < n$$

我們已經會做 $n=1$ 的情況了，基本上就是 $\frac{1}{x}$ 的積分，獲得 $\ln|x-a|$ 形式的反導函數。如果 $n \geq 2$ ，則我們考慮 S 以 a 為參考點的泰勒形式：

$$S = s_0 + s_1(x-a) + s_2(x-a)^2 + \cdots + s_m(x-a)^m, \text{ 其中 } m < n$$

可見

$$\frac{S}{(x-a)^n} = \frac{s_0}{(x-a)^n} + \frac{s_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{s_2}{(x-a)^{n-2}} + \cdots + \frac{s_m}{(x-a)^{n-m}}$$

其中 s_0 、 s_1 、 s_2 、...、 s_m 都是實數，而 $n-m \geq 1$ 。現在，根據

積分基本公式

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, & \text{當 } n \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \text{當 } n = -1 \end{cases}$$

我們就能夠做「情況一」的有理函數積分了：

$$\int \frac{S}{(x-a)^n} dx = \int \frac{s_0}{(x-a)^n} dx + \int \frac{s_1}{(x-a)^{n-1}} dx + \cdots + \int \frac{s_m}{(x-a)^{n-m}} dx$$

再強調一次：我們只要「原則性地認識」有理函數在「情況一」的積分技術就行了。詳細的計算，應該交給電腦軟體去做。關鍵的學習目標是：同學們現在該理解，為什麼有理函數的反導函數會出現 $\ln$ 函數？