

無窮遠處的極限

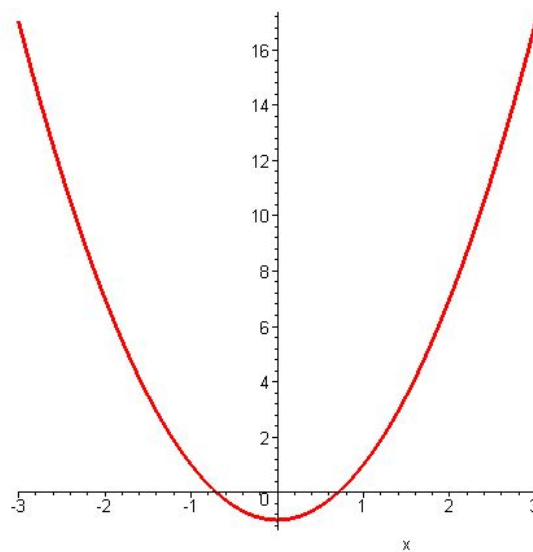
單維彰・2014 年 7 月

之前看過的函數極限，都是 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 這種形式，亦即在 x 「趨近」於某個實數 a

時，求函數 $F(x)$ 的值。現在討論 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ 形式的極限，也就是當 x 毫無節制地越來越大時，求函數 $F(x)$ 的值；稱為「 x 趨向無窮大的函數極限」，或「無窮遠處的函數極限」。

最基本的知識，當 $F(x)$ 是一個多項式，舉例而言 $F(x) = 2x^2 - 1$ ，我們知道它的圖形是一條開口向上的拋物線，「大域」圖形（如下）可以看得出來函數是「無上界」的：當 x 越來越大， $F(x) = 2x^2 - 1$ 也是越來越大。這種「無上界」的情況，記作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - 1 = \infty$$

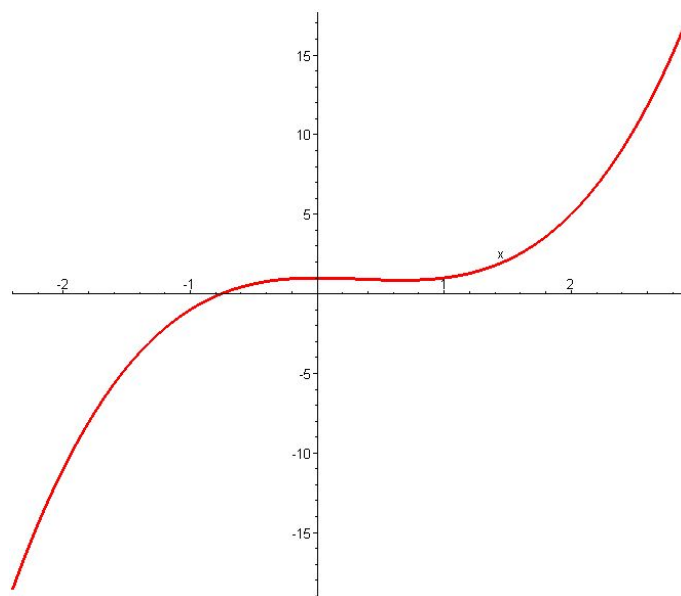


反方向，當 x 朝著負的方向越來越遠時，記作 $x \rightarrow -\infty$ 。以上圖形也顯示當 x 朝著反方向趨向負無窮大時， $F(x) = 2x^2 - 1$ 仍然是無止境的越來越大。這種情況記作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 1 = \infty$$

再看一個三次函數的例子： $F(x) = x^3 - x^2 + 1$ ，我們已經知道它的「大域」圖形就像 $y = x^3$ ，如下圖。在這個情況下，當 x 朝右越來越遠， $F(x)$ 的值無盡地上升，但是當 x 朝左越來越遠， $F(x)$ 的值無盡地下降。像這種情況，我們記作

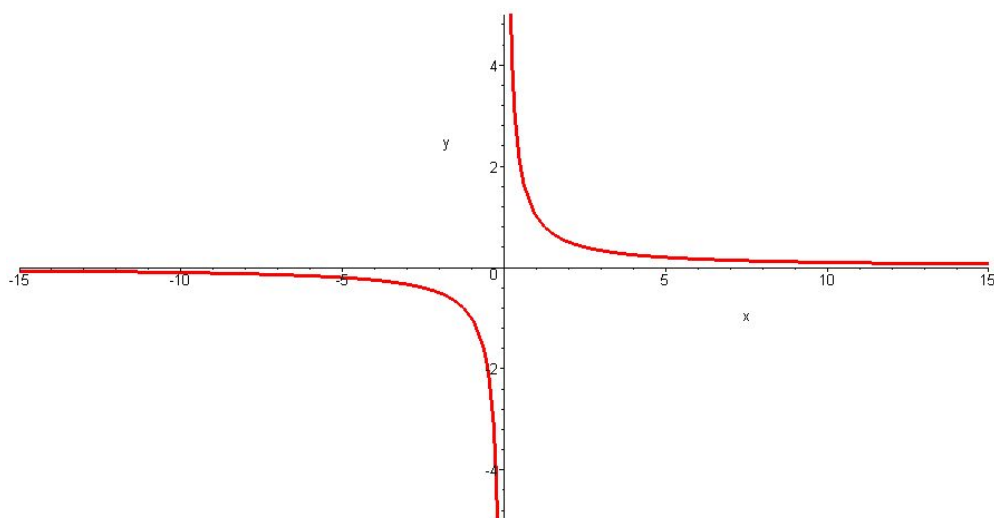
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 + 1 = \infty \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - x^2 + 1 = -\infty$$



以上兩種情況，可以推廣到所有（非零次）的多項式函數。簡單地說，就是「**多項式函數無界**」的觀念，記作

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \pm\infty \quad \text{其中 } F(x) \text{ 為次數} \geq 1 \text{ 的多項式函數}$$

但是，多項式以外的函數，就沒這麼單純了。例如一次倒數函數 $F(x) = \frac{1}{x}$ 的圖形如下。很明顯地，當 $|x|$ 越來越大， $\frac{1}{|x|}$ 當然就越來越小，卻永遠不是 0。



上圖的狀況，用極限符號表達為

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

像這種「圖形越來越靠近」水平線 x 軸的情形， x 軸被稱為函數 $y = \frac{1}{x}$ 之圖形的

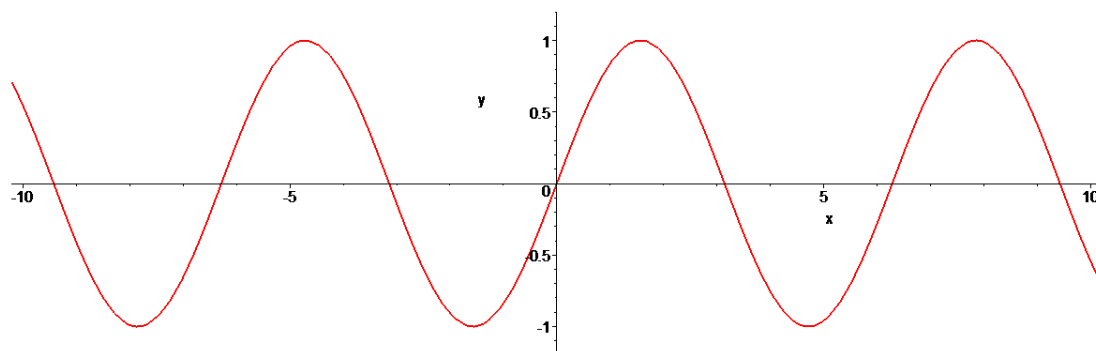
水平漸近線。其實當 $x \rightarrow \infty$ 時，因為 x 是正數， $\frac{1}{x}$ 是從正數遞減到 0；相對地，

當 $x \rightarrow -\infty$ 時，因為 x 是負數， $\frac{1}{x}$ 是從負數遞增到 0。所以，有時候也記作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = +0 = 0^+ \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = -0 = 0^-$$

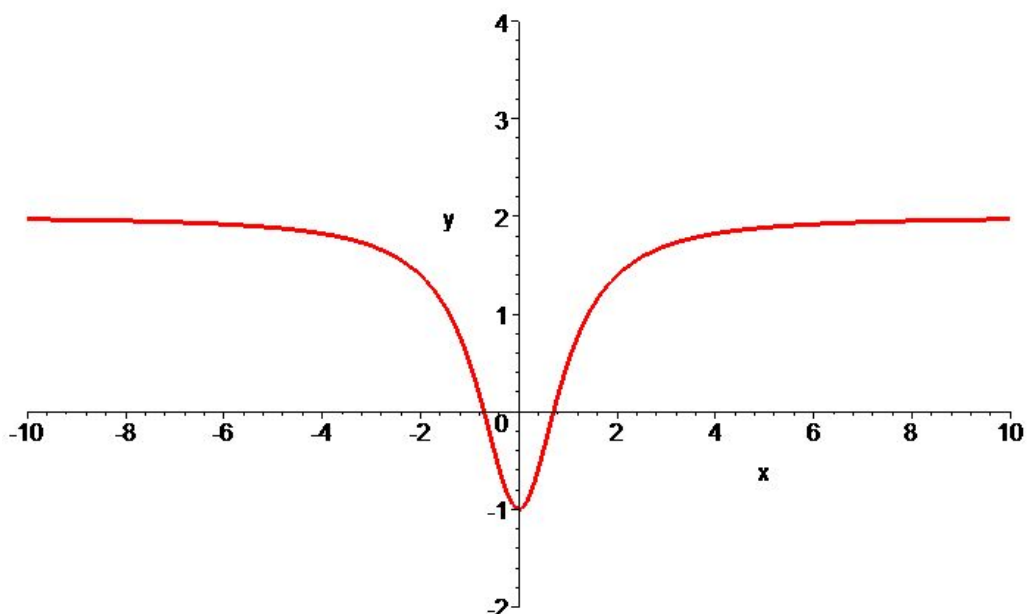
可是，無窮遠處的極限不只有發散（趨向 $\pm\infty$ ）和趨近於 0 兩種情況。粗略地分類，無窮遠處的極限有「存在」和「不存在」兩大類結果，其中「不存在」的情況有兩種：「無界」地發散到 ∞ 或 $-\infty$ ，或者「有界」但是並不靠近任何一個固定的實數。同學們或許已經學過的正弦函數 $\sin x$ 就是無窮遠處極限不存在的（有界但非定數）典型例子。 $y = \sin x$ 之圖形如下。

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \quad \text{不存在}$$

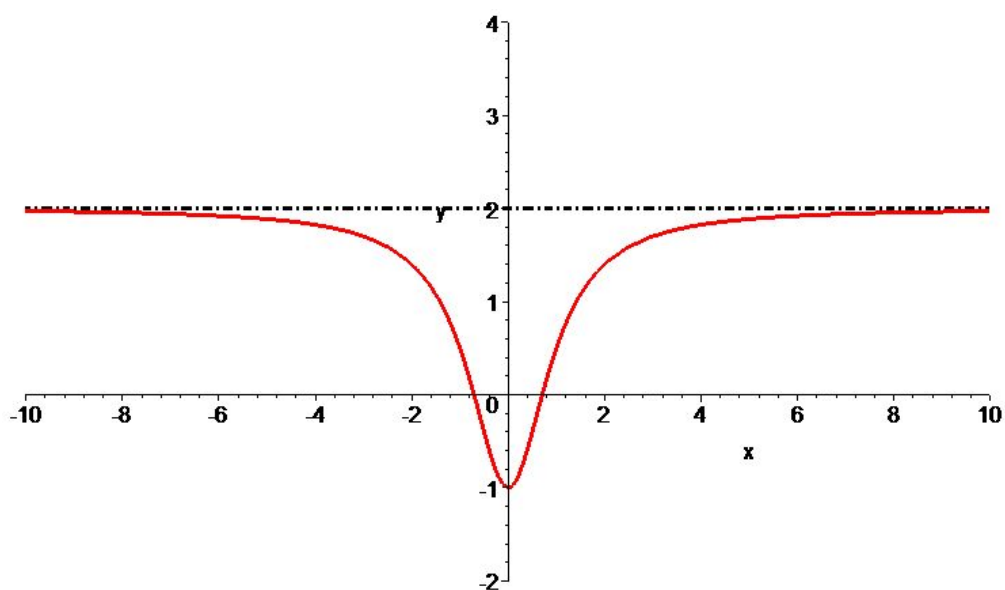


無窮遠處的極限「存在」的意思就是隨著 $x \rightarrow \infty$ 或者 $x \rightarrow -\infty$ ， $F(x)$ 的值越來越靠近某個固定的實數；那個固定的實數，就是「極限」。前面看到極限為 0 的情況，但是當極限存在時，當然不一定是 0，任何實數都可能。例如觀察函數

$$F(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ 的圖形：}$$



很明顯地，當 $x \rightarrow \pm\infty$ 時， $F(x)$ 的值從下方遞增而越來越靠近一個定數，那個定數不是 0。當函數值靠近一個定數 L ，函數的圖形就會靠近水平線 $y = L$ ，而它當然就是函數圖形的「水平漸近線」。如下圖，我們看到 $y = 2$ 是 $F(x)$ 的水平漸近線。



這種情況記作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = 2 \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = 2$$

一般而言，當 $y = F(x)$ 的圖形有水平漸近線 $y = L$ ，意思是說

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = L \quad \text{或者} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = L$$