

有理函數的圖形

單維彰・2014 年 8 月

所謂有理函數就是 $f(x) = \frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ 形式的函數。諸如以下形式皆然。

$$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x^2} \quad \frac{x+1}{x-1} \quad \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \frac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x} \quad \frac{x^2+x+1}{x^3-2x} \quad \frac{x^3+1}{x^3-x}$$

有理函數 $f(x)$ 的函數圖形，有以下幾個特徵。

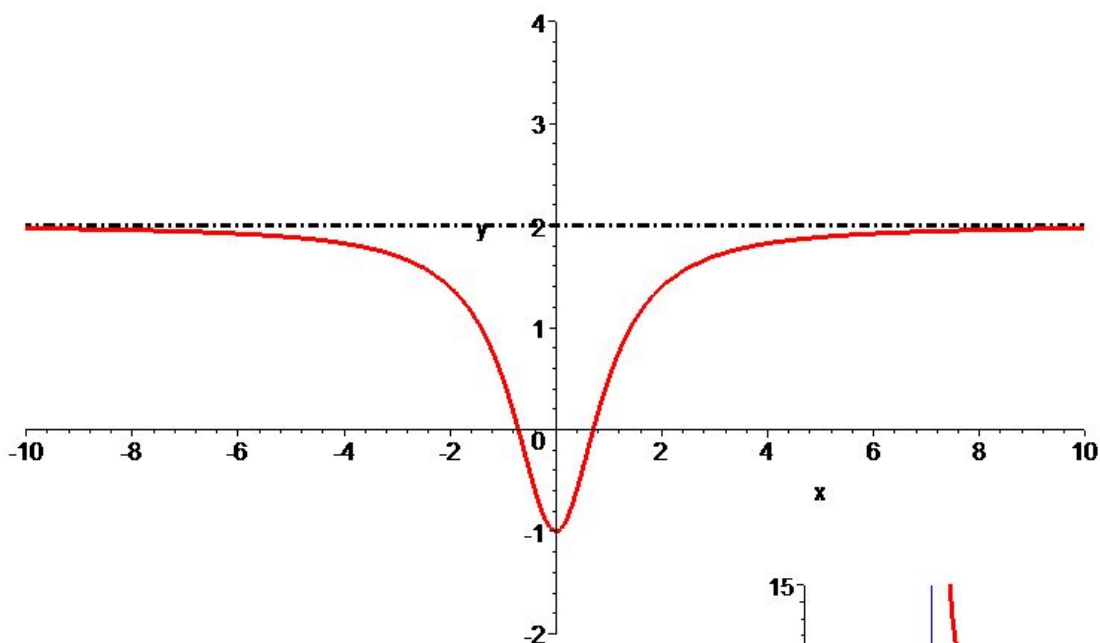
A. 原則上，就像多項式：

A1. 若 $f(a)=0$ 圖形與 x 軸交於 $x=a$

A2. 若 $f'(a)=0$ 則可能在 $x=a$ 發生極值

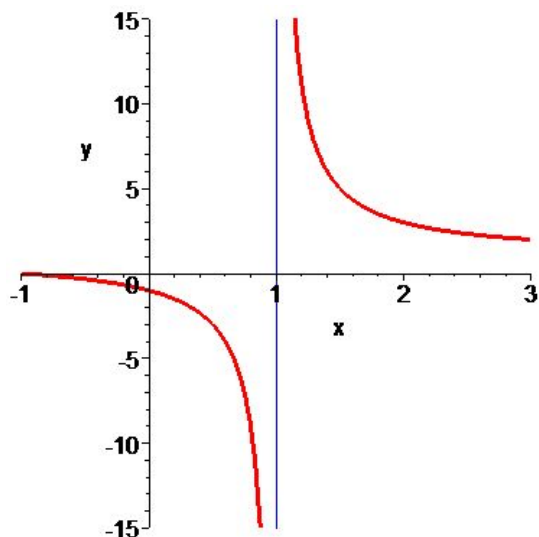
A3. 若 $f''(a)=0$ 則可能在 $x=a$ 發生反曲點

B. 如果 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ 則 $y=L$ 是水平漸近線，如下圖。

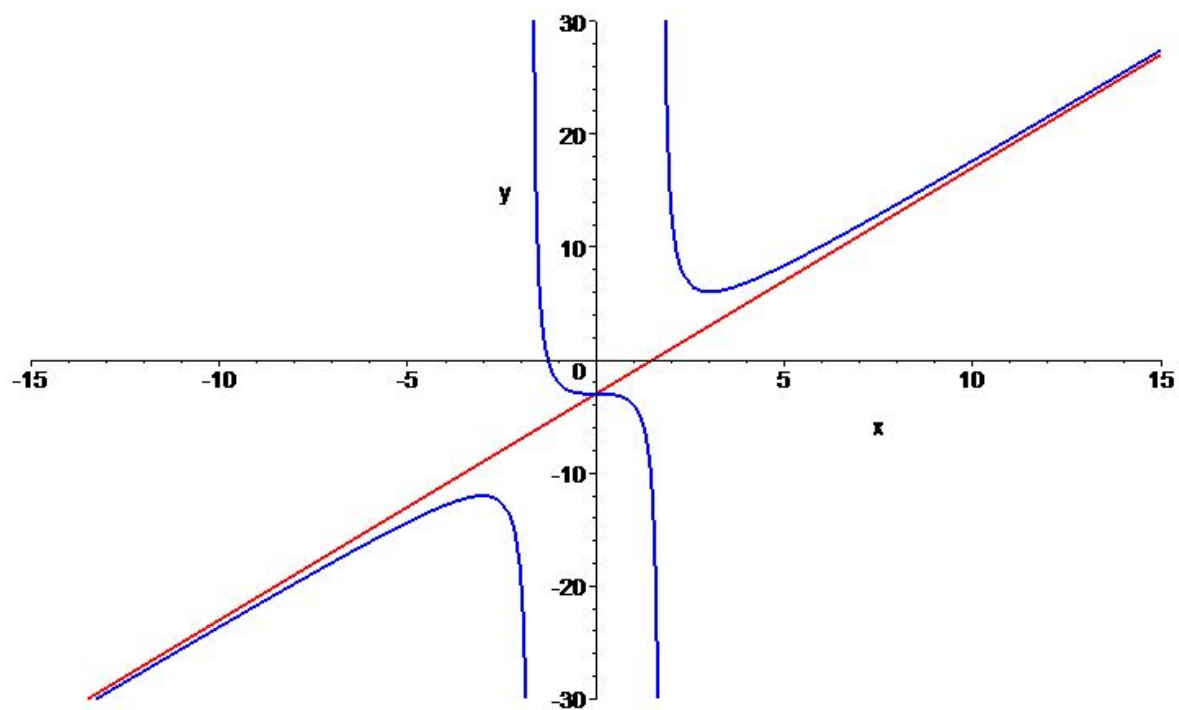


C. 如果 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ 則 $f(x)$ 在 $x=c$ 處沒有

定義，亦即 c 不在 f 的「定義域」內。不僅如此，當 x 從 c 的左邊或右邊越來越靠近 c 時， f 的圖形無盡地上升或者下降，但絕不會和鉛直線 $x=c$ 相交。我們說 $x=c$ 是 $y=f(x)$ 之圖形的鉛直漸近線。此情況如右圖。



D. 若 $f(x) = \frac{n+1 \text{ 次}}{n \text{ 次}}$ 則函數圖形有斜漸近線，像這樣：



基本上，函數圖形的繪製可以交給電腦，此處的學習目標是概念上的理解。概念的理解，將來有助於想像雙變數函數在空間中的圖形（曲面）。