

有理函數的無窮遠處極限

單維彰・2014 年 8 月

我們在这一節裡探討 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ 形式的極限問題，但是專門考慮 $F(x)$ 是有理函數的情況。有理函數的名字來自於有理數，所謂有理數 (rational number) 是 $\frac{\text{整數}}{\text{整數}}$ 形式的數。數學家經常把多項式對應於整數，例如整數可以做因數分解，多項式可以做因式分解。把整數換成多項式，有理數的觀念就換成有理函數了。所謂有理函數 (rational function) 是 $\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ 形式的函數。

我們知道一個基本事實，就是 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ ，分母的絕對值越來越大時，分數 $\frac{1}{x}$ 的絕對值越來越小，不論正負，都趨近於 0。這個事實可以推廣到 $\frac{1}{x}$ 的任意正數次方，因為

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^r = \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \right)^r = 0^r = 0$$

所以對所有 $r > 0$ ，都是 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ 。分子不必是 1，任何實數 a 也可以，因為

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^r} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(a \cdot \frac{1}{x^r} \right) = a \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} \right) = a \cdot 0 = 0$$

所以對所有 $r > 0$ ，對任意實數 a ，都是 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^r} = 0$ 。注意只有正的次方 r 才可以，因為如果是負的次方，分子分母就要顛倒，那就不一樣了。

處理有理函數無窮遠處的極限的一般性方法，就是把分子和分母「同除以分母的最高次項」。例如

$$F(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{3x^2 - 2x}$$

分母的最高次項是 x^2 ，因此

$$F(x) = \frac{(2x^3 + x^2 - 1) \div x^2}{(3x^2 - 2x) \div x^2} = \frac{2x + 1 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{2}{x}}$$

現在，如果做 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ ，可以先運用前面的知識，知道

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0。$$

所以分母只會留下一個數（首項係數），提出來之後，就是多項式 $2x+1$ 在無窮遠處的極限，我們知道它是沒有上界的那種不存在，又稱為發散，記作 ∞ ；算式如下。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 1}{3x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} 2x+1 = \frac{1}{3} \cdot \infty \end{aligned}$$

但是 ∞ 除以 3 還是沒有上界，所以整個極限還是沒有上界，所以最後的結論還是發散到 ∞ 。

朝向另一個方向的無窮遠處極限 $x \rightarrow -\infty$ 作法是一樣的，但是要注意正負號。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{3x^2 - 2x} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x+1 = \frac{1}{3} \cdot (-\infty) = -\infty$$

$-\infty$ 是無量下跌的意思，無止境地下降。它的 $\frac{1}{3}$ 仍然是無止境地下降，所以

$$\frac{1}{3} \cdot (-\infty) = -\infty。$$

一般而言，只要分子的次數比較高，則無窮遠處的極限就是

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{高次}}{\text{低次}} = \infty \text{ 或 } -\infty，\text{簡記為 } \pm\infty$$

用同樣的手法，我們再做一個例子，這次分母的次數比較高。例如取

$$F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 2x}$$

討論它在無窮遠處的極限，還是先將分子和分母同除以分母的最高次 x^3 ，然後先將分子和分母上面的 $\frac{a}{x^r}$ 取極限為 0，像這樣：

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

一般而言，只要分母的次數比較高，做完以上步驟之後，分子就是零，而分母非零，所以結果必為零。也就是說

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{低次}}{\text{高次}} = 0$$

同學可能現在已經猜到了，接下來要講分子和分母同次的情況。譬如

$$F(x) = \frac{x^3 + 1}{2x^3 - x}$$

用前述同樣的作法，得到了

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

同學應可理解，一般而言

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{同次}}{\text{同次}} = \frac{\text{首項係數}}{\text{首項係數}} = L$$

在這種情況， $F(x)$ 的函數圖形有水平漸近線 $y = L$ 。

做個結論：

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{高次}}{\text{低次}} = \infty \text{ 或 } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{低次}}{\text{高次}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{同次}}{\text{同次}} = \frac{\text{首項係數}}{\text{首項係數}} = L, \text{ 此時 } F(x) \text{ 有水平漸近線 } y = L$$