有理函數的鉛直漸近線

單維彰・2014 年 8 月

我們在這一節裡探討 $\lim_{x\to c}|R(x)|=\infty$ 形式的極限問題，而且專門考慮 $R(x)$ 是有理函數的情況。首先，我們回顧一個基本原理：當計算過程當中，出現零分母的狀況，以前都說它「不存在」，但是既然現在知道「不存在」有兩種意涵：不確定一個定數，或者無盡上升或下跌，我們可以簡記後者為

$$\frac{\pm a}{0}=\pm\infty \text{，其中 } a \text{ 是個正數}$$

在進入極限之前，先探討有理函數的鉛直漸近線：

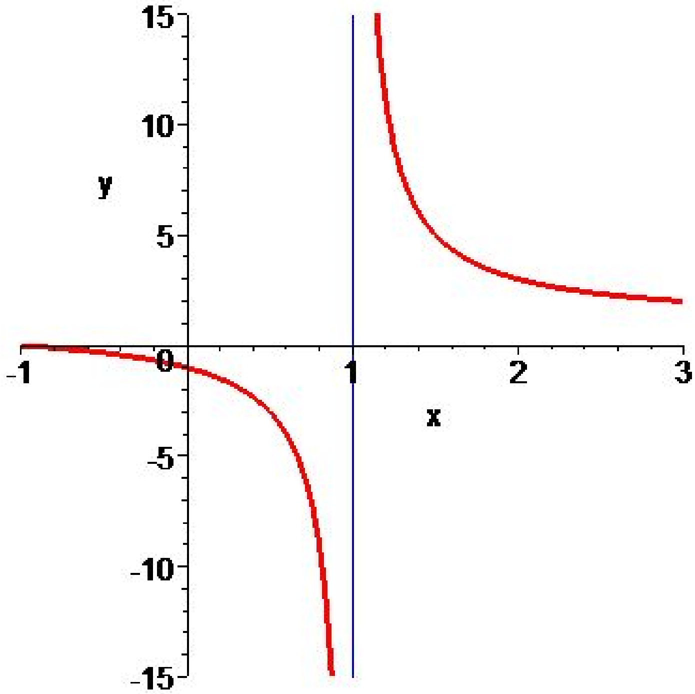
若有理函數 $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 之 $\dfrac{f(c)\neq 0}{g(c)=0}$ 則

(1) $R(c)$ 無定義，$x=c$ 不在 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的定義域之內

(2) $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

鉛直線 $x=c$ 是 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 之鉛直漸近線

例如 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 的分母 $x-1=0$ 有解 $x=1$，$x=1$ 是 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 的鉛直漸近線，如下圖。



從上圖看到一個現象：當 x 從 c 的左邊越來越靠近 c，$R(x)$ 無盡下跌，我們

說 $R(x)$ 趨向負無窮大，或者發散到負無窮大，記作 $R(x)\to -\infty$；而當 x 從 c 的右邊（逆向地）越來越靠近 c，$R(x)$ 卻無盡上揚，我們說 $R(x)$ 趨向無窮大，或者發散到無窮大，記作 $R(x)\to\infty$。為了分辨這種「左右有別」情況，需要學習新符號。

以範例定義左極限與右極限

當 x 從 1 的左邊靠近 1，也就是當 x 遞增到 1，記作 $x\to 1^-$。此時有理函數

$$\frac{x+1}{x-1}\to\frac{2}{-0}=-\frac{2}{0}=-\infty$$

這種情況記作

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty$$

讀作「$\dfrac{x+1}{x-1}$ 在 1 的左極限發散到負無窮大」。當 x 從 1 的右邊靠近 1，也就是當 x 遞減到 1，記作 $x\to 1^+$。此時有理函數

$$\frac{x+1}{x-1}\to\frac{2}{+0}=\frac{2}{0}=\infty$$

這種情況記作

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\infty$$

讀作「$\dfrac{x+1}{x-1}$ 在 1 的右極限發散到無窮大」。

　　再舉一個例子。有理函數

$$y=\frac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x}$$

的分母 $3x^2-2x=0$ 有解 $x=0$ 和 $x=\dfrac{2}{3}$，此時它有兩條鉛直漸近線：

$$x=0 \quad \text{和} \quad x=\frac{2}{3}$$

當 x 遞增到 0，有理函數的值

$$\frac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x}=\frac{2x^3+x^2-1}{x(3x-2)}\to\frac{-1}{-0\cdot(-2)}=-\frac{1}{0}=-\infty$$

也就是說

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x}=-\infty$$

反之，當 x 遞減到 0，有理函數的值

$$\frac{2x^3+x^2-1}{x(3x-2)} \to \frac{-1}{+0\cdot(-2)} = \frac{1}{0} = \infty$$

也就是說

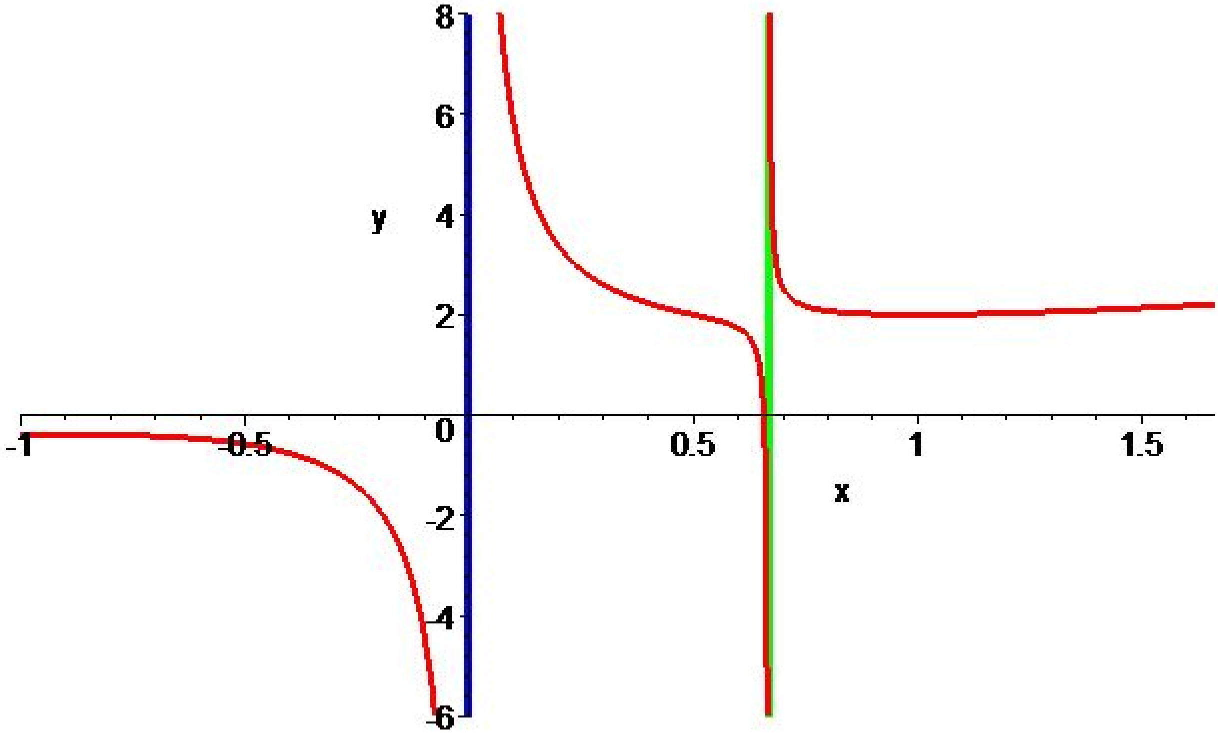
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x} = \infty$$

所以我們知道函數 $y=\dfrac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x}$ 的圖形，在漸近線 $x=0$（也就是 y 軸）的左邊無盡下跌，而右邊無盡上升。

類似地，再處理另一條鉛直漸近線 $x=\dfrac{2}{3}$。當 $x\to(2/3)^-$

$$\frac{2x^3+x^2-1}{x(3x-2)} \to \frac{2(2/3)^3+(2/3)^2-1}{(2/3)\cdot(-0)} = -\frac{1/27}{0} = -\infty$$

所以 $\displaystyle\lim_{x\to(2/3)^-} \frac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x} = -\infty$。同理 $\displaystyle\lim_{x\to(2/3)^+} \frac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x} = \infty$。可見函數圖形在漸近線 $x=\dfrac{2}{3}$ 的左邊無盡下跌，而右邊無盡上升。電腦繪製圖形如下。



電腦的繪圖其實展示了更多的性質，例如整個圖形看起來只有一個反曲點，

發生在$x=0.3$附近。其實函數$y=\dfrac{2x^3+x^2-1}{3x^2-2x}$還有更豐富的性質，在這一幅圖的範圍裡看不出來，我們需要學習更多的知識才能理解它的其他性質。在別的教材講。

最後，如果$\dfrac{f(x)}{g(x)}$之$g(x)=0$無實根，則$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$沒有鉛直漸近線。例如$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$，$x^2+1=0$無實根，它的函數圖形如下。