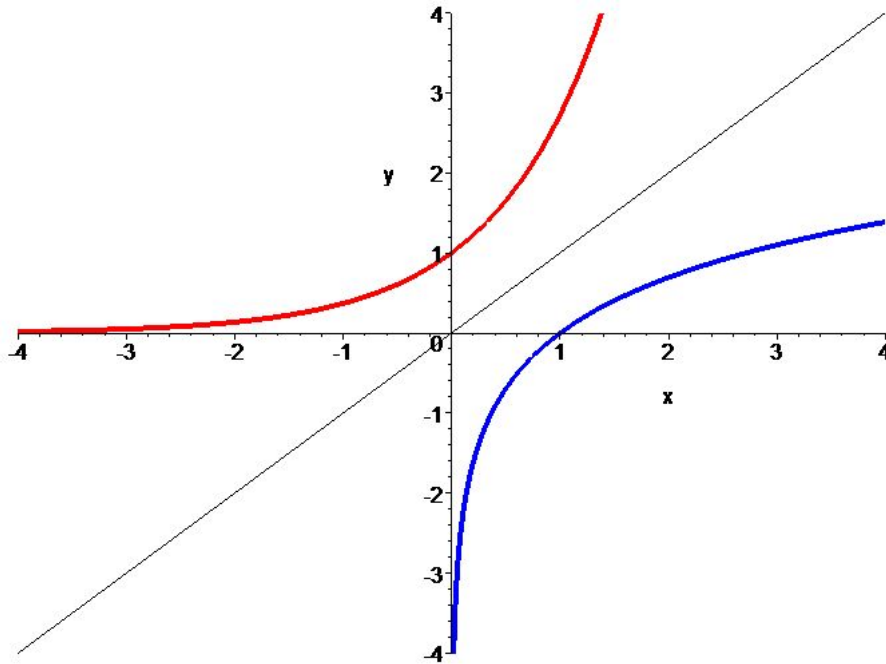


指對數函數的極限

單維彰・2014 年 11 月

回顧標準指數函數 $\exp(x)$ 和自然對數函數 $\ln x$ 的函數圖形。下圖中，紅色是標準指數函數的圖形，藍色是自然對數函數的圖形，它們對稱於 45° 仰角的直線 $y = x$ 。



從圖形看得出來 e^x 是永遠嚴格遞增的，所以它朝右邊越來越大，沒有上界。用極限式子正式寫出來，就是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

其實以上結論除了觀察圖形以外，還可以「略為」論述。因為 $e > 2$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x > 2^\infty, \text{ 而我們知道 } 2^\infty = \infty, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty。$$

標準指數朝負無窮大方向的極限是

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

換句話說， x 軸是標準指數函數 $\exp(x)$ 的水平漸近線。

自然對數函數的無窮遠處極限比較麻煩，從圖看得出來它是遞增的，但是好像遞增得越來越緩，不確定它是否真的無上界？運用「反證」的想法，如果 $\ln x$ 有上界，就是說所有實數 x 都滿足 $\ln x < L$ ，其中 L 是個正數。那麼 $e^{\ln x} < e^L$ ，這表示 $x < e^L$ ：也就是說「所有」實數都小於某個正數 $\exp(L)$ ，這顯然是各謬誤

的結論。所以 $\ln x$ 「沒有上界」也就是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

因為自然對數的定義域是所有正數，所以它沒有負無窮遠處的極限。而當 x 遞減到 0，我們可以討論 $\ln x$ 在 0 右邊的單邊極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\ln x) = -\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = -\infty$$

而自然對數的單邊極限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ 經常簡記作

$$\ln 0 = -\infty$$

換句話說， y 軸是 $\ln x$ 的鉛直漸近線。

其實以上關於 $\ln x$ 的結論，都可以利用 $\exp(x)$ 和 $\ln x$ 的對稱性而得到。