

不定形式

單維彰・2014 年 8 月

我們知道有些關於「無窮大」的極限運算結果是必然的，它們可以寫成規則（或公式），例如 $\frac{1}{\infty} = 0$ 、 $\frac{1}{0} = \infty$ 等等。但是有些形式的極限運算結果卻是「什麼可能都有」，它們稱為「**不定形式**」。最基本的一種不定形式極限問題是

$$\frac{0}{0}$$

它的意義是分子和分母同時趨近於 0 的極限問題。我們學習微積分的一個最基本知識就是函數 f 在 a 的導數（切線斜率）定義如下：

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0}{0}$$

可見導數就是一種 $\frac{0}{0}$ 形式的極限，而它的值有各種可能，並不一定；所以，我們稱 $\frac{0}{0}$ 形式的極限為「不定形式」。

本節不討論不定形式的極限計算，僅介紹不定形式共有七種互通的形式，其實它們全都是 $\frac{0}{0}$ 的變形。所以，在 $\frac{0}{0}$ 以外，共有以下五種。我們分別列出它們的形式，以及它們與 $\frac{0}{0}$ 的關係。

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ ：不定形式

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{\infty}}}{\frac{1}{\frac{1}{\infty}}} = \frac{0}{0}$$

(2) $\infty - \infty$ ：不定形式

$$2^{\infty - \infty} = \frac{2^{\infty}}{2^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$$

(3) $0 \cdot \infty$ ：不定形式

$$0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

(4) 0^0 ：不定形式

$$\ln 0^0 = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty) = -(0 \cdot \infty)$$

(5) 1^∞ : 不定形式

$$\ln 1^\infty = \infty \cdot \ln 1 = \infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty$$