

羅必達法則

單維彰・2014 年 8 月

羅必達法則 (l'Hôpital's rule) 的大意就是說：微分和極限，是魚幫水、水幫魚的關係。從 $\frac{0}{0}$ 這個「標準的」不定形式說起，起先是

$$\text{從 } \frac{0}{0} \text{ 形式的極限 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ 算出導數 } f'(a)$$

但是反過來，如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ，而且知道 $f'(a)$ 和 $g'(a)$ 的值，則可以

$$\text{從導數 } f'(a) \text{ 和 } g'(a) \text{ 計算 } \frac{0}{0} \text{ 形式的極限 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

以下就是法則的敘述。

羅必達法則（基本款）

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定形式，再如果 f 和 g 都在

$$x = a \text{ 的附近可微，而且 } g'(a) \neq 0，\text{ 則 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}。$$

我們僅就一個比較單純的狀況來說明羅必達法則。以下說明雖然具有「啟發性」，但是不夠「全面」，所以不能稱為「證明」。但是，本教材認為這樣程度的解釋，暫時夠用了。假設 $f(a) = 0$ 而且 $g(a) = 0$ ，則對 $x \neq a$ 可以做

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

所以

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

這就是基本款的羅必達法則了。

舉一個正確使用羅必達法則的例子。計算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 時，先檢查它確實是不

定形式；確實是 $\frac{0}{0}$ 之不定形式。雖然我們已知

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

但還是用來練習羅必達法則：

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x^2 - 1]'}{[x - 1]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

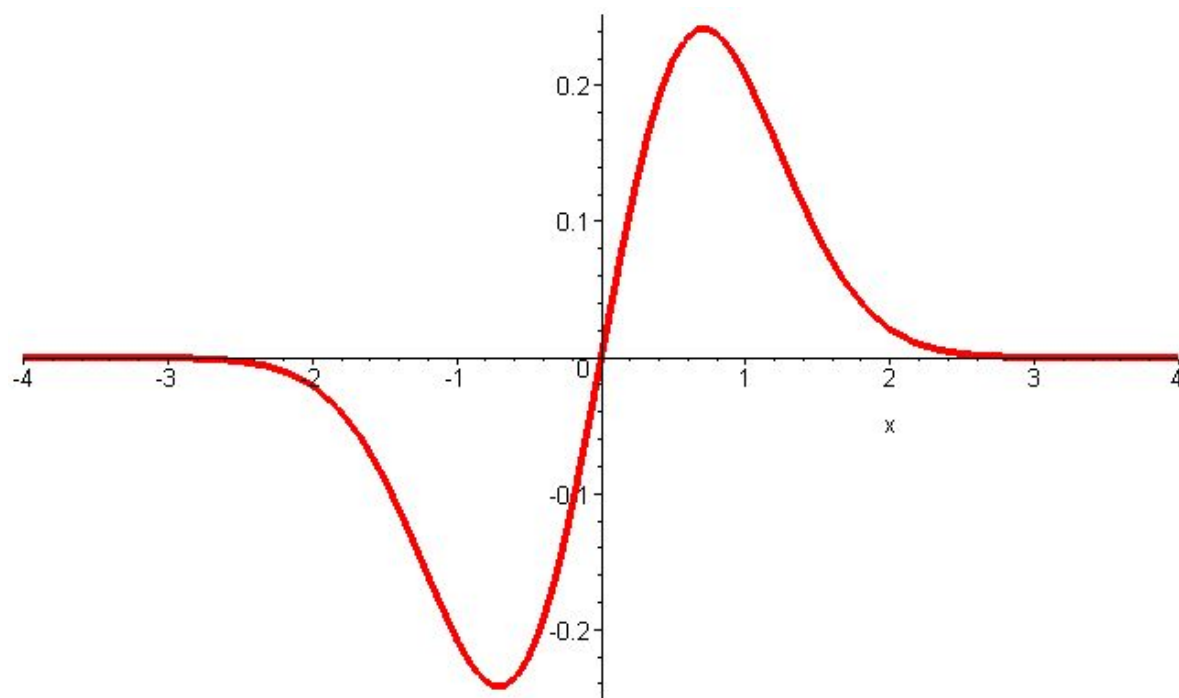
接著，舉一個**錯誤**使用羅必達法則的例子。記得必須先確認極限問題是不定形式，才能使用羅必達法則。例如要做 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ ，檢查它其實是 $\frac{2}{0} = \pm\infty$ ，並非不定形式，其極限不存在，不能使用羅必達法則。如果誤用了它，則會得到錯誤的結果 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$ ！！

以下多看幾個例子。

當我們處理正規分佈之機率密度函數的期望值時，將會面臨函數

$$f(x) = xe^{-x^2} = x \cdot \exp(-x^2)$$

我們知道它是一個奇函數，圖形對稱於原點。看圖似乎顯示 x 軸是它的水平漸近線。



而計算的結果確實是： $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}}$ ，確認它是 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定形式，可運用羅

必達法則而計算

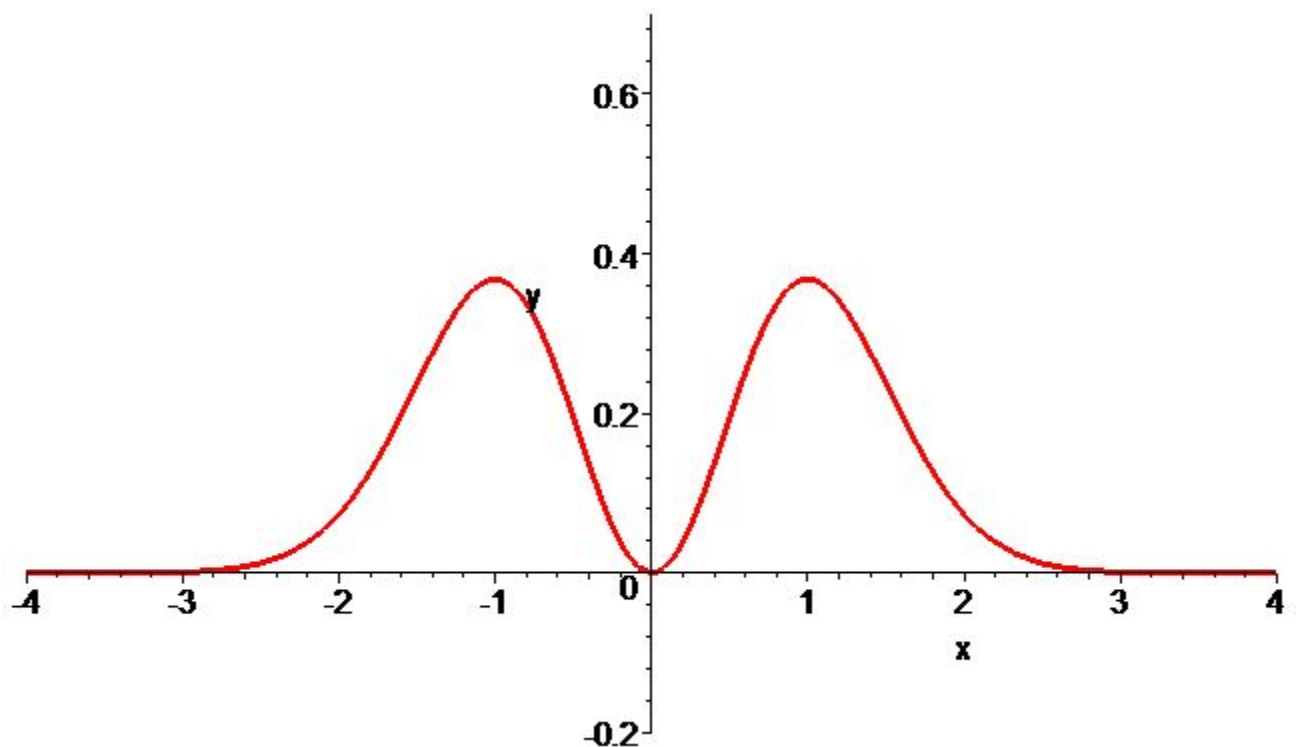
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

利用奇函數的對稱性，將第一象限的圖形對稱到第三象限，即可得知負無窮遠處的極限也是 0： $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2} = 0$ 。

當我們計算正規分佈之機率密度函數的變異數時，將會面臨函數

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} = x^2 \cdot \exp(-x^2)$$

我們知道它是一個偶函數，圖形對稱於 y 軸。看圖似乎顯示 x 軸是它的水平漸近線。



而計算的結果確實是： $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}$ 確認它是 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定形式，可運用羅必達法則而計算

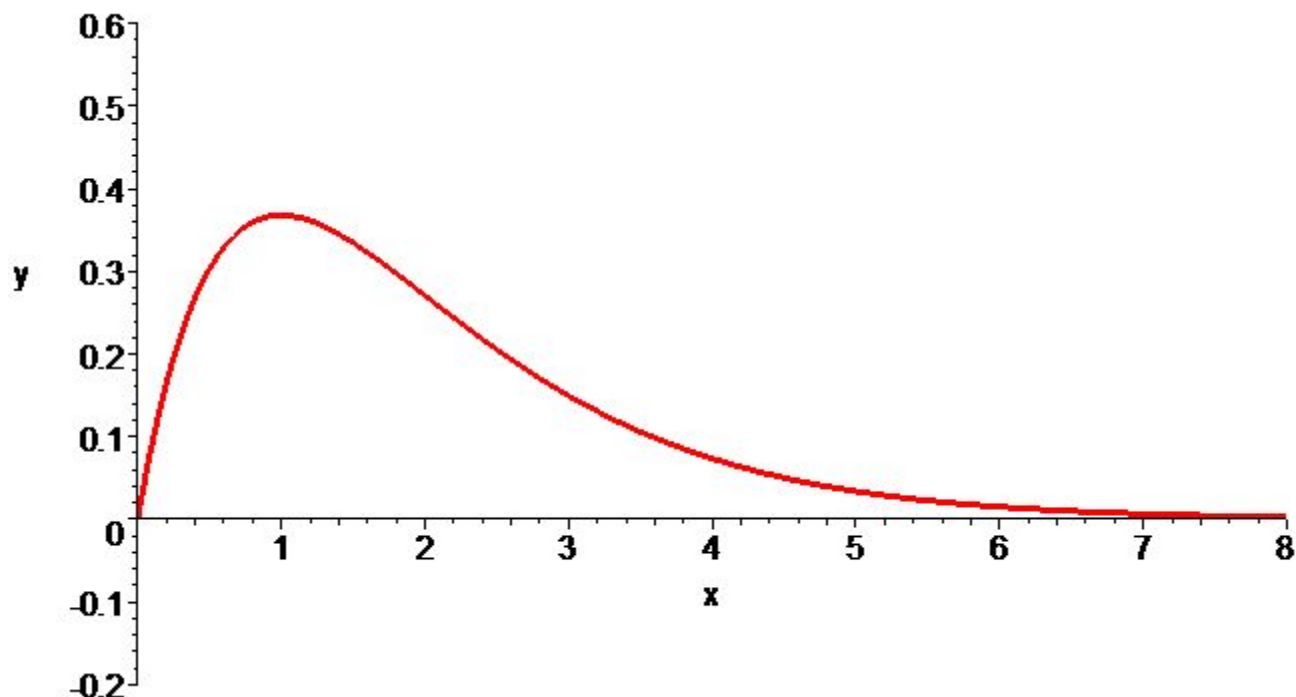
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

利用偶函數的對稱性，將第一象限的圖形對稱到第二象限，即可得知負無窮遠處的極限也是 0： $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ 。

最後舉阻尼函數 (Damping Function) 為例：

$$f(x) = xe^{-x} = x \cdot \exp(-x), \quad x \geq 0$$

它的圖形僅在第一象限，如下。



從圖形也似乎顯示 x 軸是它的水平漸近線。檢查 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ 確認它是 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定形式，可運用羅必達法則而計算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

羅必達法則還有一個「進化版」，是說如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定形式，而且符合一些技術條件，則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

以上版本的好處是，如果使用羅必達一次（分子和分母各做一次導函數）之後，仍然保持為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定形式，則可以再做第二次的羅必達法則，直到最後不再是不定形式為止。這種情況，請同學自行練習。