不定形式的極限

單維彰・2014 年 11 月

$\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定形式的極限問題，可以直接運用羅必達法則處理。而其他四種不定形式：

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad 0^0 \qquad 1^\infty$$

則可以先設法改成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定形式，然後用羅必達法則。

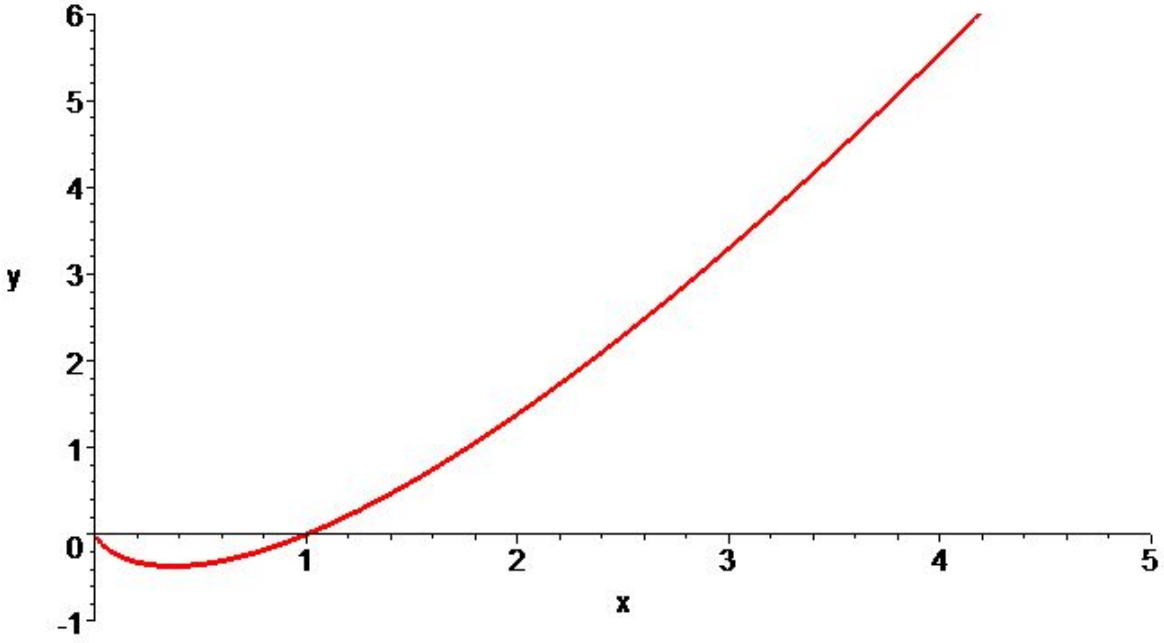
例如 $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ 是 $0 \cdot \infty$ 之不定形式，經

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

改為 $\frac{\infty}{\infty}$ 之不定形式，那就可以使用羅必達法則了：

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{x} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0$$

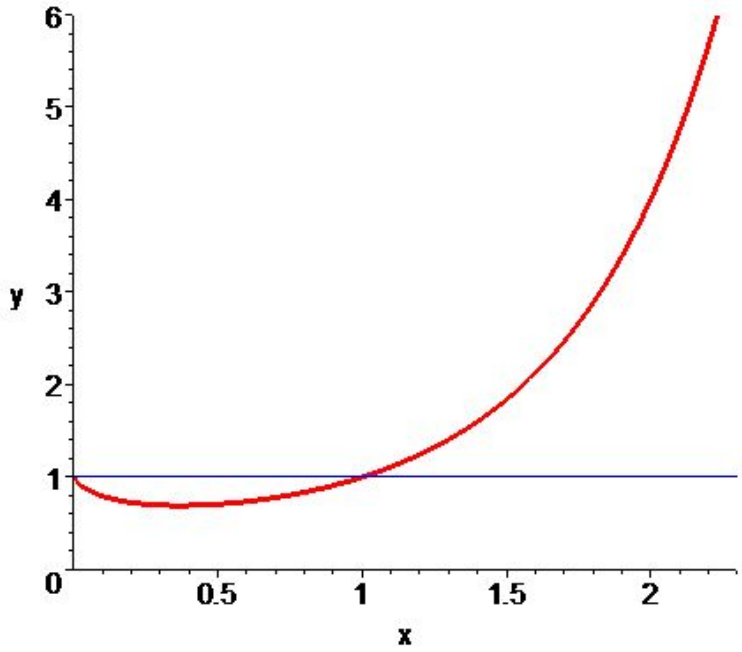
函數 $f(x) = x \ln x$ 的圖形如下。剛才已經知道它「幾乎」以原點為「左端點」，而顯然 $f(1) = 0$ ， $f(2) > 0$ ，所以它在 $x \in (0,1)$ 之區間內為負。



再例如求極限 $\lim_{x\to 0^+} x^x$ 。令

$$f(x) = x^x = \exp(\ln x^x) = \exp(x \ln x)$$

我們發現 f 遞增得很快： $f(1) = 1$ 、 $f(2) = 4$ 、 $f(3) = 27$ 、 $f(4) = 256$ 。其函數圖形如下。



從圖形看到 $y = x^x$ 「幾乎」以 $(0,1)$ 為「左端點」。計算的結果也確實如此，先確認 $\lim_{x\to 0^+} x^x$ 是 0^0 之不定形式，運用指對數將之變形為

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \exp(\lim_{x\to 0^+} x \ln x)$$

標準指數裡面的極限雖然還是不定形式，但剛才已經算過了，所以

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \exp(\lim_{x\to 0^+} x \ln x) = \exp(0) = 1 \text{ 。}$$