

## 微分的加法性質

單維彰・2012 年 10 月

令  $f(x)$  和  $g(x)$  是多項式函數，所謂**加法性質**是說

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

係數積性質和加法性質，合稱為**線性性質**。我們還是用多項式除法來驗證加法性質。如果  $q(x)$  和  $p(x)$  分別是  $f(x)$  和  $g(x)$  除以  $x-a$  的商，則  $f'(a) = q(a)$  而  $g'(a) = p(a)$ 。由除法原理分別寫成等式

$$f(x) - f(a) = q(x)(x-a),$$

$$g(x) - g(a) = p(x)(x-a)。$$

兩式相加得到

$$[f(x) + g(x)] - [f(a) + g(a)] = [q(x) + p(x)](x-a)$$

意思是說  $f(x) + g(x)$  除以  $x-a$  的商是  $q(x) + p(x)$ ，所以  $f(x) + g(x)$  在  $a$  的導數就是

$$q(a) + p(a) = f'(a) + g'(a)。$$

考慮任一個多項式的微分，例如  $[x^2 + 1]'$ ，加法性質使得它們可以逐項計算，也就是  $[x^2]' + [1]'$ 。更進一步，因為任意常數函數  $f(x) = 1$  的泰勒形式就是  $f(x) = 1$ ，所以對任意參考點  $a$ ，它的一次係數  $c_1$  都是 0。於是我們知道

$$[1]' = 0。$$

所以

$$[x^2 + 1]' = [x^2]' + [1]' = 2x。$$

加法性質配上係數積性質，可以將多項式的微分逐項計算，再提出係數，只要做單項函數的基本公式即可。例如

$$\begin{aligned} [x^3 - x^2 + 2x + 3]' &= [x^3]' + [-x^2]' + [2x]' + [3]' \\ &= [x^3]' - [x^2]' + 2[x]' + 3[1]' \\ &= 3x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

從以上的經驗，我們又可推論，對任意常數  $c$ ， $[c]' = c[1]' = 0$ 。所以可歸納

$[c]' = 0$ ，其中  $c$  為任意實數。

如果我們不理會  $0 \cdot x^{-1}$  之中  $x$  有可能是  $0$  的狀況，而規定  $0 \cdot x^{-1} = 0$ ，則我們的基本公式可以推廣成

$[x^n]' = n x^{n-1}$ ，其中  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

現在我們知道了，我們可以用微分的線性性質和基本公式「個個擊破」多項式，而得到任意多項式函數的導函數；只要再代入  $x = a$  就是它在  $a$  的導數了。