反比函數之微分應用範例

單維彰・2013 年 2 月、2022 年 1 月

我們已經知道如何將情境問題轉換成多項式函數的「**數學模型**」，然後運用微分處理它的極值。透過一階和二階導函數，不但可以判斷極值發生的位置，還可以判斷函數圖形哪裡有反曲點。在科學、工程、經濟、和金融的情境裡，並不只使用多項式函數，還使用其他的函數。以下提供一個典範問題。

典範問題

假設某工廠的每月生產成本模型是

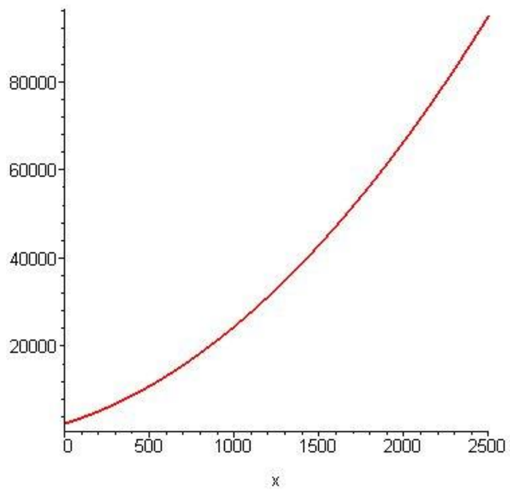
$$c = 2400 + 12x + 0.01x^2 \quad \text{(千元)。}$$

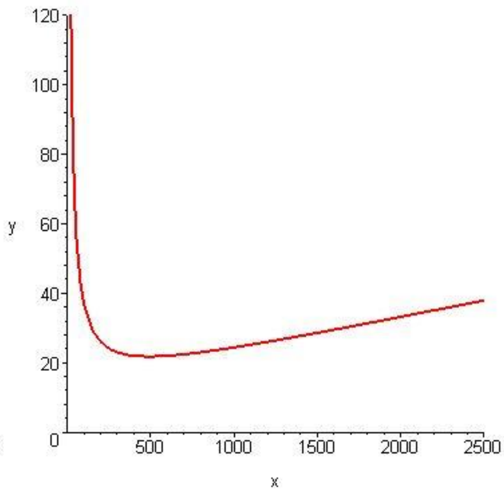
其中 x 是每月產量 (件)，c 是總成本 (cost)。求最低單位成本的產量。

成本可分固定與不固定的成本。在上述 c 的數學模型裡，與產量 x 無關的常數項 2400 就是固定成本（例如廠房的租金和員工薪資），與 x 有關的 $0.01x^2 + 12x$ 就是不固定成本（例如原料和水電費）。總成本是一個開口向上的拋物線，如下圖左。總成本的極值問題是無聊的：不生產成本最低。對工廠來說，關心的是單位成本，也就是平均每件產品的成本：

$$\bar{c} = \frac{c}{x} = 0.01x + 12 + \frac{2400}{x}$$

單位成本 $\bar{c}$ 與產量 x 的關係圖如下圖右。典範問題 3 就是求發生極小值的 x 和當時的 $\bar{c}$ （讀作 c bar）。





現在我們面臨的數學問題是：令 $f(x) = 0.01x + 12 + \dfrac{2400}{x}$ ，求使得 $f(x)$ 達到最小的 x。這裡就出現了多項式以外的函數形式：$\dfrac{2400}{x}$ ；像這樣自變數 x 在分

母的函數稱為**反比函數**。

運用（推廣的）微分基本公式，搭配「線性性質」，就可以像處理多項式函數一樣，做一般函數的微分。以上述的單位成本函數

$$\bar{c} = f(x) = 0.01x + 12 + \frac{2400}{x}$$

為例，其一階導函數 $f'(x)$ 也是逐項提出係數之後做微分：

$$f'(x) = 0.01[x]' + [12]' + 2400[\frac{1}{x}]'$$

運用基本公式，便得到

$$f'(x) = 0.01 \times 1 + 0 + 2400[-\frac{1}{x^2}] = 0.01 - \frac{2400}{x^2}$$ 。

現在同學們應該同意，其實微分不難做：只要獨立每一項，把係數挪出來，對剩下的基本函數套用公式即可。公式也很簡單：把次方拿到前面當係數，然後次方減一。

回到典範問題。為了找到 $f(x) = 0.01x + 12 + \frac{2400}{x}$ 發生最小值的 x，我們要先找到 $f(x)$ 的臨界點，也就是 $f'(x) = 0$ 的根。前面已經知道 $f'(x) = 0.01 - \frac{2400}{x^2}$，求解

$$0.01 - \frac{2400}{x^2} = 0$$ ，

其實也就是 $x = \pm\sqrt{240000} = \pm 200\sqrt{6}$，負不合而得到 $x = 200\sqrt{6}$。根據我們已經看過的函數圖形（上面的右圖），知道此臨界點必為發生最小值的位置。將根式換成近似值，得到 $x \approx 490$ 時發生最小值，其值大約為 21.8 (千元)。