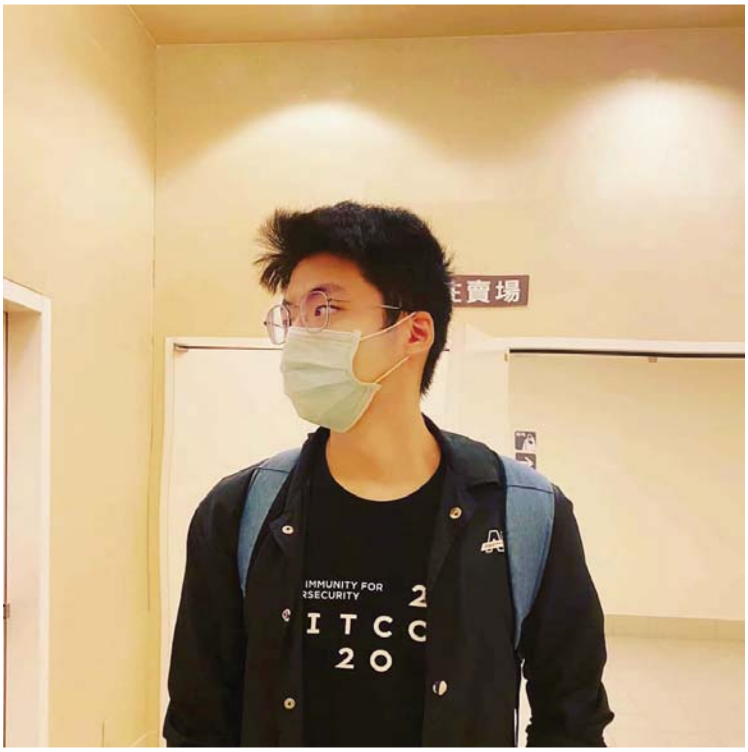


遺害澤 4000 年

淺談微積分的歷史

一開始只是想要維持自己的寫作能力，擔心自己的文筆隨著時間漸漸退步，但沒想到這堂課比想像中的更豐富許多。作業範圍多元的題目，讓我閱讀自己以前不會主動去查找的領域；在分組討論的過程中，能夠聽到別人對於自己文章的想法，讓我調整自己的想法以及內容；在老師講評的時候，能夠聽到老師的專業分析，以及許多額外的補充內容。這篇文章的內容又剛好是單維彰教授的擅長領域，許多內容都是教授指導才會有許多進步的。希望這堂課能夠有更多人知道，因為他的內容十分紮實並且使我受益良多。

許展昱

遺害澤 4000 年—微積分的歷史

微積分可能並不是大家感到陌生的名詞，對於沒接觸過的人來說，他似乎象徵著困難艱澀的數學，要是頂尖聰明的人才能駕馭的，但對於普通聰明的理工學生卻是又愛又恨的存在，恨他難以處理、觀念抽象又在意數學式的型態，卻又愛他在分析以及解釋世界帶給我們的便利。很難想像若微積分消失了，我們要怎麼清楚的闡釋物理的巧妙規律、經濟的漲落變動、工程的堅固結構、數學的優美定律。微積分讓我們看清極微之處，也可縱觀大局，這就是微積分的美妙之處。

本文旨在以歷史的角度切入微積分發展，想要向讀者分享人類如何擁有今日在微積分學上的成就，以及他之後如何演進，影響我們的生活。

一、古人的想法

微積分最早的需求，是為了計算體積與面積，從古埃及、古中國和古希臘都有相關的記載。其中估計於西元前 1850 年寫下的莫斯科數學莎草紙，裡面包含了被截斷的金字塔和半圓的體積，但很可惜許多公式都是未加證明的，我們無法得知當時的人是如何得到結果，再加上那時還沒有對於圓周率的認識，文本都是以 258／81 做為近似的。[1]

到後來數學逐漸由古希臘著名的歐幾里得與阿基米德接手，前者我在這邊賣個關子，暫且不提他。阿基米德除了發現浮力原理開心到在街上裸奔之外，他在微積分上也有重大的貢獻。他利用窮竭法來證明拋物線中所圍成的面積，是一特定內接三角形的 4/3 倍。這個三角形的第三個頂點是斜率與交弦（也就是前兩個點的交點）平行的切線切點，然後在拋物線與三角形之間不停地做出相似三角形，將其面積和寫成無窮

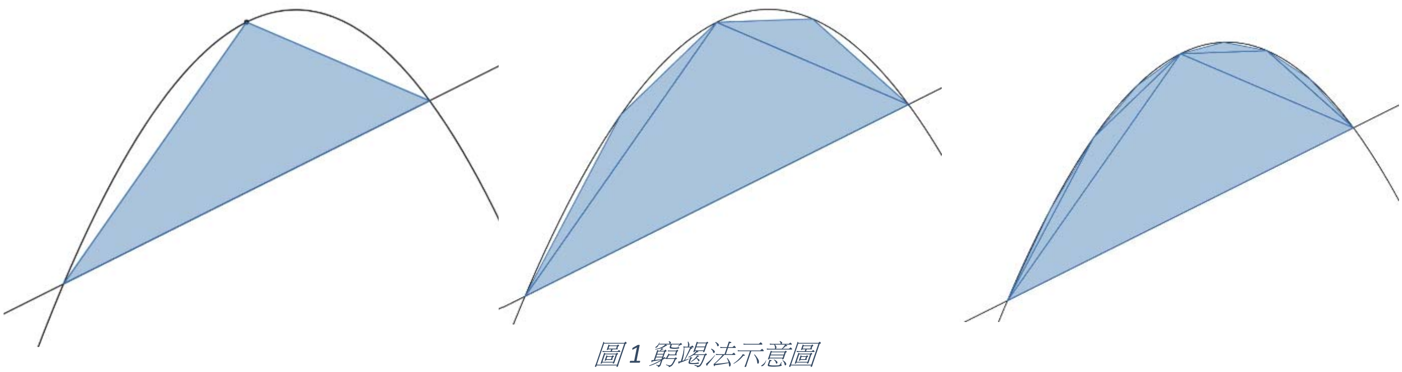


圖 1 窮竭法示意圖

級數，再證明只要三角形畫得夠多，面積就能任意的逼近拋物線所圍面積。[6]他也利用將圓周展開堆疊成三角形的方法來計算圓面積。[2]如下圖所示，我們知道圓周長的公式

$S = 2\pi r$，可以想像把圓形每一層都剝開攤平，再堆疊起來，我們可以用三角形面積公式來計算圓面積，也就是 $\frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2$，這些都是早期對於積分想法的開端。

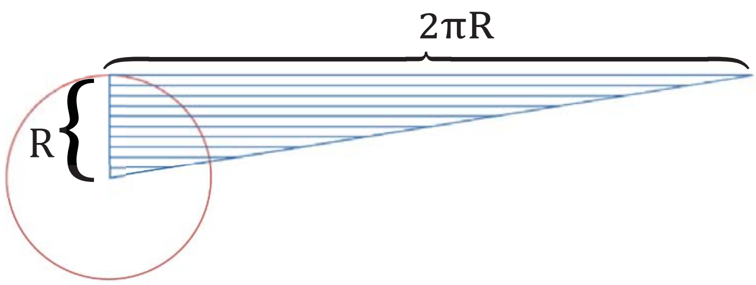


圖 2　展開圓

約 500 年後，中國的劉徽利用將圓切成正 96 邊形的方式來逼近圓周率，可以看出他已經有極限的概念，接著他用所研究出的等比級數推廣到 3072 邊形，再 200 年後祖沖之利用劉徽的方法割到 24576 邊形，將圓周率精確到小數點後第七位，接下來一千多年中西方文明都沒有人能夠超越這個數值，直到 15 世紀才被阿拉伯的阿爾·卡西以精確至 17 位突破。可以發現雖然中國已經有：隨著提高分割的數量，就能越來越趨近所求之值的概念，但仍然沒有發展出非常完善的極限理論，再加上中國當時所使用的計算方式是利用籌算，也就是用排棒子的方式，來做加減乘除，此法不僅過程相當的廢時，也很難清楚地記錄過程，又因為中國對於應用的過度重視，數學因此沒有在中國有嚴謹、完善的理論發展。

這些古文明所發展出的極限處理手段，由於缺乏系統性的做法，也沒有提出完備的理論，在今日並不被認為是正式的微積分起源。古埃及人沒有給出任何解釋、阿基米德只能處理特定問題、劉徽和祖沖之不完全能算用了極限觀念，但他們對於分割和逼近的手段及想法的確為微積分點起了一絲的火苗。

二、十七、十八世紀

從伽利略開始，科學開始傳播，又因為克卜勒對於行星軌道的數學性論述，許多人開始嘗試用數學與邏輯的方式來　解釋天體的軌道、物體的移動、液體的流動…，也開始研究位置、速度、加速度…，其中延伸出的問題是曲線的長度、切線、曲率…，他們是運動中非常重要的性質。傳統計算這些量值的方法相當的直觀，位置就是取個原點，量距離就可以得到，速度就是位置差除以時間間距，加速度就是速度差除以時間間距。但這時我們遇到一個大麻煩，雖然上述的量值計算都沒特別困難，但一定得取平均才能計算，例如說 2 秒到 3 秒之間的平均加速度，4 點 20 到 5 點 30 之間的平均速度，因為我們只能知道時間始末的位置、加速度，無論如何都要有一定的時間差

才能計算。可是，我難道沒辦法知道某個物體在 5 點 07 分的速度或者是 2.7453 秒的加速度嗎?在那一個瞬間、在某個定點，明明我們就知道他在那個剎那擁有著特定速度，卻好像無法計算?如果運動是等速的，或者是等加速度的，那可能還很好計算，但若是踏著不穩定的步伐，忽快忽慢，像哈雷彗星的狹長橢圓軌道一樣，我們要如何計算各個瞬間如何移動?同時期出現了許多傑出的物理學家、數學家各自的發展起了處理曲線弧長、切線、函數極值的分析方法，可謂是微積分群雄割據的時代，於是對於趨近曲線上定點的各種技巧開始發展出來，微積分在歷史上正式的出現。

（一)、牛頓與萊布尼茲之前

笛卡爾將坐標系帶入了數學之中，這步創舉必須特意提出，是因為利用坐標系可以將代數與幾何結合在一起，過去以純幾何學的方式求解時，很多時候必須憑藉著直覺與經驗來畫輔助線，難以複製和系統化的學習。引入直角坐標系之後，我們可以透過機械化的加減乘除開方來求得答案，結合代數與幾何便能將曲線用代數表達出來，使得物體運動的性質變得容易許多。

有著坐標系的支持下，數學家與物理學家們（在那個時代實在沒有太大的差別）終於能夠用代數化的方式研究前面提到的長度、切線、曲率…。義大利數學家卡瓦列里研究廣義拋物線，也就是x^n的方程式時，就發現求面積與求斜率的運算有互逆關係，歸納出了現今寫做：

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

的方程式，但他只有考慮 n 為正整數的情形，沃里斯將其推廣到 n 為負數與分數的情況。沃里斯的學生在 1657 年著手研究$y^2 = x^3$曲線的弧長，他所利用的方法已經隱含著微積分基本定理裡，積分與微分互為反運算的概念了，但他並沒有看出這樣絕妙的關係，只當做特例來處理。後來由知名數學家費馬延伸成$my^2 = x^3$，縱使他在微分也有得出許多重要的結論，像是費馬極值定理—也就是在函數極大值與極小值處微分值為 0（在微積分學裡是極重要的定理）—也在數學史上有舉足輕重的地位，都沒有看出微分積分之間的關係。艾薩克・巴羅（牛頓的老師）就曾經在書裡提到微積分基本定理，也就是斜率與面積運算是互逆的關係，其實就是微分與積分的結合，但就如我們在歷史上看到的，他只有將重心放在如何求出切線，沒有把重心放在斜率面積的互逆關係，因此錯過了微積分發明人的頭銜。[3]

（二)、牛頓與萊布尼茲

有著許多人的貢獻，有關曲線性質的著作逐漸多了起來，

1665 年英國發生倫敦大瘟疫，牛頓當時正就讀劍橋大學三一學院，為了防止瘟疫擴散，大學關閉，把學生都趕回家鄉。對於牛頓來說，這反而給了他許多的時間研讀

與思考前人的著作。牛頓在疫情期間，大量的閱讀了許多關於數學的發表，他在茫茫的公式之中，發現了有許多問題都有著某種若有似無的關係，好像意味著斜率與面積有著連結。他深入的探究其中的對應之處，整理出了微積分，並將其應用在解釋各種物理現象上，其中最著名的就是萬有引力，他成功地將前人的結果統合成微積分基本定理。但當時他並非稱呼這樣的方法為微積分，而是流數法，他將所有的變數都想成是時間的函數，不論是 x 或是 y 都是隨著時間改變，再去考慮不同變數之間的關係。

德國的律師萊布尼茲，對於哲學與數學都十分的有興趣，時常花很多時間在考慮與分析數學的邏輯、運算與符號。1672 年他從無窮小量與數學分析的角度切入，獨立建立出了微積分，而他有個基本的信念，就是好的符號可以減少思維的勞動，所以他會花上數天決定微積分所要用的符號，也因為他精心的設計，微積分目前主要的符號仍然是使用萊布尼茲所用的。[4,5]

（三）、微積分的缺陷

隨著微積分的成功，開始使用無窮小量來分析問題的人日益增加，也因此引來許多人的詬病，其中最常有的疑問便是：為甚麼無窮小量總是忽大忽小的？以下舉個例：通常我們計算斜率的方法是取兩點高度差除以兩點距離差，如下圖 3 所示便是

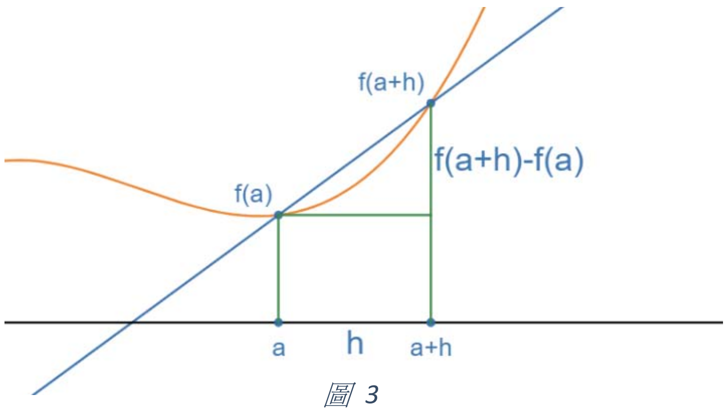


圖 3

$$斜率 = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

但若要求切線斜率的話，就是讓 h 越來越小，讓 a+h 越來越靠近 a，以 x^2 來舉例就是

$$斜率 = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}$$

$$= \frac{2ah+h^2}{h} = 2\mathrm{a}+\mathrm{h}$$

但因為 a+h 非常非常靠近 a，所以就相當於 h 非常非常小，可以把他視作 0，因此在 a 這個點上的切線斜率為 2a。愛爾蘭的喬治·貝克萊這時就不愉快了：「所以你前面說 h 不是 0，然後做完一連串的運算之後，再跟我說 h 是 0？能夠這樣又是 0，又不是 0 的

嗎？」因此縱使微積分成功的解釋了許多問題，但他在根本上有許多值得懷疑的地方，當時的牛頓與萊布尼茲雖然說用著順手，也是其重要的建立人，但也無法解釋為何可用，也不知道到底哪裡出了錯。這個問題一直卡著數學界許多年，直到柯西完整的定義何謂極限，微積分才踏穩了腳步。

三、微分方程與微分幾何

至此，讀者們可能還無法理解究竟微積分是多麼強大的工具，也不知道對於後世的貢獻在哪。我這邊想要用物理學的角度，舉一個常見與廣泛的應用：微分方程，以及一個拓展人類眼界的應用：微分幾何，希望如此可以讓讀著了解於生活中舉足輕重的角色。

（一)、微分方程

當我們嘗試解釋生活中的各種現象時，最簡單的方式便是描述現象，例如說國中就學過的 F＝ma，力等於質量乘上加速度；當高溫跟低溫的東西碰在一起，就會逐漸變成相同的溫度；敲擊鼓面使得鼓因震動發出聲響…。但除了描述現象之外，物理學家、工程師們總是會試著找到其中隱含的規律，並且嘗試用數學公式來定量的描繪事物如何發生，最後我們發現研究各種現象最方便的方法是描述事物是如何變動的，而這樣的變動常常通常建立於變化量與目前的其他狀態成正比，像是人口的增加量時常與目前人口有倍數關係，或者是物體溫度的升降與目前的溫度分布有倍數關係，而當我們知道是如何變動的，就可以從給定的條件求出事物實際的變動形式，這便是微分方程的中心思想。

以上的敘述可能過於抽象，為了舉幾個具體的例子，我們這邊先講解一下微積分的符號，d 這個符號在微積分裡的意思就跟刀片一樣，碰到甚麼東西，就把他切成極小的薄片，遠薄於洋芋片、衛生紙、A４紙…任何你想得到的東西。

在物理中，計算速度的方法是兩點之間的距離，除以走過這段距離所花的時間，那如果今天我想看看在某一個瞬間、某一個定點我的速度，就是用我瞬間走過的距離除以瞬間所花的時間，用數學式寫作：

$$\text{速度}=\frac{\textit{這一個瞬間的位置減掉前一個瞬間的位置}}{\textit{瞬間所花的時間}}=\frac{d\,\textit{位置}}{d\,\textit{時間}}$$

而加速度的算法非常類似，它是瞬間的速度差，除以瞬間所花的時間，它寫作

$$\text{加速度}=\frac{\textit{這一個瞬間的速度減掉前一個瞬間的速度}}{\textit{瞬間所花的時間}}=\frac{d\,\textit{速度}}{d\,\textit{時間}}$$

如果把加速度用位置來表達的話就是

$$加速度=\frac{d\left(\frac{d位置}{d時間}\right)}{d時間}=\frac{d^2位置}{(d時間)^2}$$

看到這裡你可能已經產生了諸多疑惑，像是為甚麼 d 會變成平方，下面的 d 時間為甚麼卻是整個二次方？如果細想背後的意義，就會發現這完全是合理的，因為加速度就是

加速度

$$=\frac{這一個瞬間的速度減掉前一個瞬間的速度}{瞬間所花的時間}$$

$$=\frac{\frac{這個瞬間的位置減掉前一個瞬間的位置}{一瞬間}-\frac{前一個瞬間的位置減掉前前一個瞬間的位置}{一瞬間}}{一瞬間}$$

如果用比較精練的數學文字，我們說位置為 x，速度為 v，加速度為 a，時間為 t，就可以寫出

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

至此，微積分的符號大致上介紹完成，我們可以回過頭來看看前面提到的微分方程。

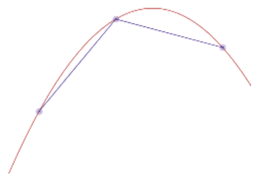
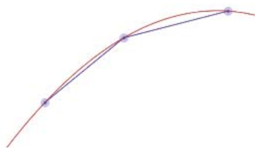
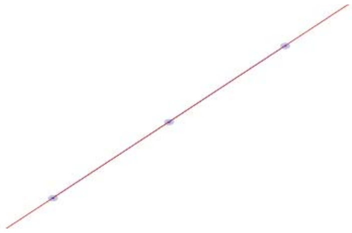
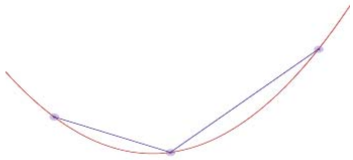
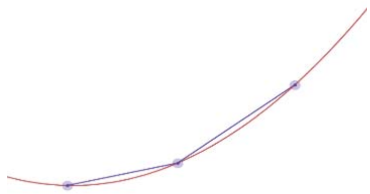
如果各位還記得國高中所學的 F=ma，其實可以寫成 a=F/m，也就會是

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F}{m}$$

如果今天知道了如何施力 F，在知道變化方式的情況下，就能回推位置是如何變化的，我們可能解出火箭的軌跡、棒球的飛行、賽車的甩尾，各有完全不同的曲線，但都能用同一條微分方程，在知道施力的方向、大小之後，得到每個物體各自的運動方式。

這時可能會有些讀者抱怨，「你講的這個我國中都學過了，有沒有甚麼新潮點的？」那就讓我們來提提另一個經典的微分方程—熱傳導方程式。如下圖，今天有在一根鐵桿子上，有三個離很近的點，他們各自有不同的溫度，我們都知道溫度不同的東西接觸在一起，會逐漸熱平衡直到所有點上都有著一樣的溫度。但事實上有些稍微不正確的地方，就是一個點的溫度變化是逐漸趨近旁邊兩個點的平均值，而變化率則是正比

於與平均值的距離，並且這些點之間的距離是無窮靠近的，如果觀察下面的表格，

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">溫度變化快 → 溫度變化慢</td></tr>
<tr><td rowspan="3">中間點溫度降低
(橫軸為空間，縱軸為溫度)
中間點溫度升高</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

可以發現其實判斷溫度變化非常的容易，我們只需要知道三個點溫度之間所成的圖形到底是向上還是向下的，還有它到底有多彎，越彎則溫度變化越快，因為微積分判斷圖形凹向的方式就是利用二次微分，用溫度對空間微分兩次來觀察它的凹向。如果說溫度的函數叫做 H，時間叫做 t，而物體的導熱係數為 D，運用我們所知的性質「物體上溫度的變化率，正比於溫度在空間上所形成的圖形有多彎」，我們就可以寫出熱傳導的方程式

$$\frac{dH}{dt} = D\frac{d^2H}{dx^2}$$

跟前面提到的一樣，我們只知道事物的變化模式，但只要給定足夠的條件，就能解出他們最後的樣子。

除了牛頓第二運動定律與熱傳導方程式之外，有許多物理公式都是以微分方程來表達的，甚至可以十分謙遜地說：物理完全是奠基於微分方程之上的，信手拈來就是量子力學的薛丁格方程式：

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

（∂跟前面提到的 d 其實是一樣的東西，只有些微的差異）
力學的波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

還有許多令人眼花撩亂，卻又清楚優雅地表達出物理定律的微分方程，這些都奠基了現代社會，不論是平地起的萬丈高樓，抑或是現代人要是沒有就會渾身不自在的網路，或是便利到不行的交通工具，都是奠基於這些以微積分作為基礎的微分方程，都多虧有近 300 年那些傑出數學家的才智與靈感，才有這一切。

(二)、微分幾何

如果說微分方程給了我們表述自然的能力，那麼微分幾何給的就是人類對於高維度的想像能力，讓我們有能力研究空間的扭曲、複雜系統的系統要如何校正與回歸。

1827 年數學王子高斯發表了《關於曲面的一般研究》，奠定了微分幾何的基礎，之後在 1854 年他的學生黎曼建立起黎曼幾何，也就是將高斯的結果推延到 n 維空間，當時這類型的分析還是相當新穎的題目，黎曼事實上開創了未來 150 年，許多數學家一生投入的數學領域。而微分幾何最著名的應用，就是 20 世紀初愛因斯坦所建立來解釋重力的廣義相對論；以及之後延伸到自動控制理論的幾何控制理論，利用微分幾何來調整系統的輸出量，在火箭、自駕車都是不可忽視的重要角色。

廣義相對論最重要的結論，就是發現重力事實上時空扭曲造成的結果。可是，假設我們已經在扭曲的空間之中，那麼要如何發現？就像靠近地面的人總會認為地球是平的一樣，扭曲只能從與空間的互動中感知到，例如說當我們不停地向前走，卻回到了原點，若固執地認為自己在一個平坦的空間中是不合理的，微分幾何最強大的能力就是縱然我們假設自己身邊的一切都是平坦的，他仍然能夠檢驗一個空間的扭曲狀況，也可以描述高維空間的運作模式。而從廣義相對論之後，物理學家開始偏向將各種物理現象，歸納為高維空間的幾何性質在我們平庸的 3+1 維的投影。

而微分幾何在控制理論的做法，可以想像成一台火箭上的閥門狀態、電流大小、軌道位置、速度、引擎轉速等各種數值，都是某個高維曲面上的一點，而輸出則是在那點上指向別的方向的箭頭，把我們目前的狀態帶向別的狀態，就可以利用微分幾何來分析如何控制一台火箭前往該去的地方。[7]

四、結語

微積分建立起我們的現代科技，從極近極微之處到極遠極大之處，舉凡建築物、交通工具、生活用品，都能看到他的應用。例如說我們如何計算網路線裡的電磁波傳遞、橋梁如何承受車輛的重量，會如何隨著承重形變，或者是如何計算汽車的風阻和

結構強度，而這些都是許多傑出的前人一點一滴累積的結果，縱使我們學不會微積分深奧抽象的道理，每天也仍然活在微積分所帶來的便利之中。

參考文獻（依查詢時間排序）：

1. Richard I. Gillings, (1982). *Mathematics In The Time Of The Pharaohs*. NewYork: Dover Publications, Inc.
2. 微積分基本定理的發展歷史在教學上的應用與啟發，數學傳播，劉柏宏，2012，https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d363/36305.pdf
3. The geometrical lectures of Isaac Barrow, translated, with notes and proofs, and a discussion on the advance made therein on the work of his predecessors in the infinitesimal calculus，Internet Archive，https://archive.org/details/geometricallectu00barruoft/page/n17/mode/2up
4. C. H. Edwards, Jr., (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag.
5. 微積分五講系列，數學傳播，龔昇, 張德健，2006，https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=30103
6. Archimedes' quadrature of the parabola and the method of exhaustion，John Abbott College，https://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/NYB/exhaustion2.pdf
7. What is geometric control theory?，Quora，(2021/Apr)，https://www.quora.com/What-is-geometric-control-theory