

單維彰師鐸獎評選佐證資料 3

高中實驗教學與臉書粉專

107 學年，我與中央大學附屬中壢高中（中大壢中）王敏芬教務主任、許舜淵數學教師合作，開設一門兩學期各 2 學分的選修課成「高一微積分（上、下）」，實驗自己的樸素微積分教材，並預先在 108 課綱實施前，實驗課綱中的新設計，在高中數學學科中心舉辦的教師研習中，分享這些預備教學的經驗。我為這一年的課撰寫了 32 份學習單，每次授課之後，根據經驗修改學習單。所有學習單及期末試卷，都打包成 ZIP 檔案，開放高中數學教師索取，已經發出大約 12 份。「高一微積分」的動機是為了更有機、有效地貫串高一的數學學習內容，順應國際數學課程演變的趨勢，以及為高中階段自然科學做好更充足的準備。這項理念經過申請人發展之後，現在已經成為一項國科會實徵研究的計畫，即將在臺中彰化地區舉行較大規模、較長時間的研究。

本文件在後面檢附中大壢中的多元選修開課計畫，教學實踐研究計畫的「告知同意規畫說明」書，以及上、下學期各挑一份中大壢中的學習單為例。

108 學年恰是 108 課綱元年，我在獲得大園國際高中朱校長及數學科同仁首肯之後，參加數學教師共備，並與數理實驗班的導師（也是數學教師）陳珈鈞老師合作，每週共授一節課，維持一學年。在大園高中臨床教學時，除了實驗微積分教材以外，也實驗 108 課綱高一部份課程的教學，並研究其得失，作成記錄。而每週參加數學科共備的一小時，則收集大園高中實施 108 課綱的第一手資料。

在高中臨床教學的經驗，對於我的師資培育工作、在職教師研習工作，以及 108 課綱的教科書審訂工作，都有很大的幫助。而我發表的觀察或研習心得，也回饋給高中數學教育現場。一部份的教學實驗結果，已經在韓國首爾發表於 EARCOME 9 國際數學教育研討會（2025 年 7 月）。

在此文件的最後，檢附中央大學師培中心發給大園高中請求同意臨床學習的函稿，以及上、下學期各挑一份大園高中的學習單為例。

次頁先分享一幅與大園高中學生的合照，以及一幅大園高中數學科共備的照片。



為了更多元地闡述 108 課綱數學素養教育的理念與實施方法，我從 109 年起在臉書社群（Facebook）建立「數學知行識」粉絲專頁，每週二上午張貼一則短文，內容主旨都是為了向社會大眾解釋數學教育、素養導向教育、數學與科技、數學通識、數學科普、數學史、數學課程史、數學評量、大學入學考試等等方面的議題；六年以來鮮少脫稿。目前累積大約 3700 名追蹤者，一般貼文都有一兩千人次的瀏覽。

<https://www.facebook.com/math.zhi.xing.shi/>



標題	發佈日期	狀態	觸及人數	瀏覽次數
 #雙語教數學 #數學師資培育 「數學英... 相片 · 數學知行識	2月10日 7:09	加強推廣	2,088	3,091
 #數學素養教育 #數學通識 (普通高中... 相片 · 數學知行識	2月3日 7:49	加強推廣	2,187	3,571
 #數學語用 筆者常常說「數學是一種語... 相片 · 數學知行識	1月21日 11:05	加強推廣	1,091	1,577
 #數學通識 1月24日星期六，臺灣數學... 相片 · 數學知行識	1月13日 7:45	加強推廣	497	876
 #中學數學課程 #數學素養教育 高中數... 相片 · 數學知行識	1月6日 7:11	加強推廣	1,675	2,411
 #雙語教數學 #數學通識 #數學語用 配... 相片 · 數學知行識	2025年12月30日	加強推廣	414	834

國立中央大學附屬中壢高級中學課程計畫表

課程名稱	授課教師	年級	學期	學分	時數	必選修
高一微積分（上）	單維彰、許舜淵	1	1	2	2	☐ 必 ☒ 選
教學目標	搭配 10 年級必修數學課程的進度，發展 17 世紀樸素理念的微積分概念與技術，並在過程中整合實數、解析幾何、方程式與不等式、函數等數學課題的學習。在前述學習主軸以外，平行展開數學文化與軟體工具的學習。本課程設計為一學年完成的教學目標，上學期發展基礎的微分概念與應用，下學期引入物理意義及積分的概念與應用。整學年的課程將涵蓋多項式函數及簡單的代數函數。					
課程簡介	高一微積分（上）」是中大壢中 107 學年第一學期對高一學生開放自由選修的課程，預計招收 40 名學生。此課程是中央大學師資培育中心與數學系合聘之單維彰教授設計的新課程，並由他自己和許舜淵老師合作授課；單教授將會親自授課 30 節以上。選修本課程的學生，請盡量繼續選修第二學期的「高一微積分（下）」，以便獲得完整的教育。因為課程銜接的必要，「高一微積分（下）」不收新學生。 本課程並不會另闢微積分的學習脈絡，而會搭配現有的高一數學必修課程來發展坐標幾何、函數、微分、積分等觀念和應用。此實驗課程沒有已出版的教材，所以學習的參考資料就是課堂講義、學習單和作業。					

一、課程屬性：☐基礎 ☒進階 ☒深化

說明：本課程一面深化高一數學課程中的實數、函數、多項式等課題，一面將學生帶領到進階的微分課題。（因為不清楚以上選項的規準，所以自行說明於此，請審查委員代為定奪。以下同。——單維彰啟）

二、課程類別：

子計畫 A	☐ 多元啟發	子計畫 B	☒ 趣味科普	子計畫 C	☐ 探索扎根
橫中貫西國際	☒ 延伸探索	博古通今科技	☒ 解決問題	社藝雙全實踐	☐ 行動參與
人語文與溝通	☐ 應用整合	才創意與分析	☒ 科技應用	家行動與實踐	☐ 社會脈動

說明：數學領綱的五項理念之第一項就說「數學是一種語言」，本課程要深入探索函數語言，並延伸至微分，那是描述關係與變化的數學語言，所以勾選了子計畫 A 的「延伸探索」。而微分可以解決最佳化類型的問題，故選「解決問題」；教

學過程中會徵引數學發展的哲思與時代影響，也會教導學生使用軟體輔助函數繪圖與符號運算，所以選了「趣味科普」和「科技應用」。

三、核心能力：

校本課程核心能力指標							
	C1.獨見創新能力		L1.多元的語文學習		H1.自我探索與定位		S1.關懷分享的襟度
■	C2.整合思考能力	■	L2.多元的文化接觸		H2.充分的自我實現		S2.回饋服務的行為
	C3.主動求知能力		L3.參與國際的交流		H3.有端正的品格		S3.履行公民責任的能力
■	C4.問題解決能力		L4.關心國際的議題		H4.責任與榮耀		S4.適應全球化社會的能力

說明：學習過程中將整合幾何、代數、坐標系統之數學觀念，故選 C2。將要運用數學與工具軟體解決問題，故選 C4。將會徵引數學發展的思想史，並擴及當時歐洲和西亞的基督教與伊斯蘭文化，故選 L2。

四、課程目標：

校本課程目標							
■	Creativity 創意與創新能力		Linguistic intelligence 語 文智能	■	High-scope vision 高瞻願景		Sociability 社會互動與實踐能力

說明：應用微分與解析幾何觀念，並運用工具軟體來解決問題，將培育創新能力。從高一基礎課程提升到整合的函數與變化關係之觀點，可提高學生的視界。

五、課程進度：

週別	主題	主要內容及說明
1	課程導入、實數	課程內容介紹，複習並延伸實數的知識。單老師請假，許老師授課。[文化]
2	國中幾何統整複習	國中平面幾何與坐標幾何的統整複習。單老師請假，許老師授課。
3	直角坐標上的點操作	直角坐標特性的深入認識。[文化]
4	方程 vs 方程式	統整認識方程、方程式、方程式圖形。[科技]
5	直線方程式與坐標操作	直角坐標的功能介紹，坐標幾何方法的初步認識。直線的斜率、平行與垂直：連結平面幾何與坐標方法的初等解析幾何。[文化]
6	方程式 vs 函數	延伸到以 y 為自變數的函數觀念。[科技]
7	方程式圖形的坐標操作	伸縮與平移。[科技]
8	多項式	作為一種對應於正整數的數學物件。[科技]
9	多項式函數圖形的大域特徵	原理與觀察。[科技]
10	多項式函數的泰勒形式	操作、原理與觀察。[文化、科技]

11	切線與導數	數學原理的認知。
12	計算導數的公式	導函數的觀念認知。
13	微分	基本公式與性質。[文化、科技]
14	導函數	基本公式與性質，操作練習。
15	多項式函數圖形	搭配多項式不等式的操作也理解。[科技]
16	極值原理	絕對與相對極值的認識。[科技]
17	最佳化問題	典範問題與練習。[科技]
18	徹底了解三次函數	根與圖形。[科技]

說明：以上 [文化] 註記表示課程中有多元文化、數學史、數學科普等內容；標記 [科技] 表示學習目標包含軟體工具的運用。

六、教材需求：

教師自編講義與學習單。

七、教學方法：

教師講述學習內容、學生參與學習任務並做隨堂練習（形成性評量）。

八、評量方式：

本課程與一般的數學課一樣，有作業、隨堂測驗、段考和期末考，其配分標準如下：

- 作業與隨堂測驗：共佔 40%
- 段考一、段考二、期末考：各佔 20%

考試可能視情況而以簡報取代。

三、多元選修課程

課程名稱	中文名稱	高一微積分（下）			
	英文名稱	Calculus for Grade 10, II			
授課年段	(由系統帶入)		學分數 (由系統帶入)		
課程屬性	☐ 專題探究 ☐ 跨領域/科目專題 ☒ 跨領域/科目統整 ☐ 實作(實驗) ☐ 探索體驗 ☐ 第二外語 ☐ 本土語文 ☐ 全民國防教育 ☐ 職涯試探 ☐ 通識性課程 ☒ 大學預修課程 ☐ 特殊需求 ☐ 其他_____				
師資來源	☒ 校內單科 ☐ 校內跨科協同 ☐ 跨校協同 ☒ 外聘(大學) ☐ 外聘(其他)				
課綱 核心素養	A 自主行動	☐ A1. 身心素質與自我精進 ☒ A2. 系統思考與問題解決 ☐ A3. 規劃執行與創新應變			
	B 溝通互動	☒ B1. 符號運用與溝通表達 ☒ B2. 科技資訊與媒體素養 ☐ B3. 藝術涵養與美感素養			
	C 社會參與	☐ C1. 道德實踐與公民意識 ☐ C2. 人際關係與團隊合作 ☒ C3. 多元文化與國際理解			
學生圖像 (依校選填)	☒ 自學壟、 ☐ 行動壟、 ☐ 關懷壟、 ☐ 高瞻壟				
學習目標	搭配 10 年級必修數學課程的進度，發展 17 世紀樸素理念的微積分概念與技術，並在過程中整合實數、解析幾何、方程式與不等式、函數等數學課題的學習。在前述學習主軸以外，平行展開數學文化與軟體工具的學習。本課程設計為一學年完成的教學目標，上學期發展基礎的微分概念與應用，下學期引入物理意義及積分的概念與應用。整學年的課程將涵蓋多項式函數及簡單的代數函數，並搭配數學必修課程，延伸到指數、對數函數，教師另外補充三角函數。				
教學大綱	週次	單元/主題	內容綱要		
	1	導數的極限定義	瞭解求導數的過程，為什麼叫做「微分」？		
	2	導數的速度意涵	在一般的變化情境中，就是變化率的意涵。		
	3	自由拋射物	牛頓的運動定律，用微分方程描述。		
	4	反導函數	處理自由拋射物類型的問題。		
	5	萊布尼茲符號	導數的另一個看法：微差的比值。		
	6	不定積分	求做反導函數的數學符號：微差的總和即還原。		
	7	分離變數法	連結圓的切線性質與微分方程。		
	8	積分基本公式	練習最基本的積分操作。		
	9	微分乘法律、除法律	技術性的微分操作，連結數學歸納法。		
	10	微分連鎖律	練習合成函數的操作。		
	11	積分的基本代換	連鎖律的反向應用。		
	12	無窮遠處的極限	漸近線的概念，連結基本的有理函數。		
	13	發散的極限	連結左、右極限，鉛直漸近線。		
	14	有理函數的圖形	搭配 Desmos，理解多項式以外的另一大類基本函數。		
	15	微積分基本定理	定積分及其意義。		

	16	積分的幾何應用	簡單的面積。
	17	切片積分法	簡單的體積。
	18	旋轉體	特殊的切片：薄圓盤或薄圓環。
學習評量	每週有一份作業，以成績最高的 10 次計分，佔學期成績 40%。期末考佔 40%。教師評定課堂表現的成績 20%。		
對應學群 (限6)	☒ 資訊 ☐ 工程 ☒ 數理化 ☐ 醫藥衛生 ☐ 生命科學 ☐ 生物資源 ☐ 地球環境 ☐ 建築設計 ☐ 藝術 ☐ 社會心理 ☐ 大眾傳播 ☐ 外語 ☐ 文史哲 ☐ 教育 ☐ 法政 ☐ 管理 ☐ 財經 ☐ 遊憩運動		
備註	限修過「高一微積分(上)」的同學選修。		

單維彰 民國 107 年 11 月 27 日

「重新設計的微積分與函數課程—從高一到大一」教學實踐研究計畫

告知同意規劃說明

本研究不涉及「人體研究」，也不特定關注原住民。在 107 學年（民國 107 年 8 月至 108 年 7 月）規劃的工作，屬於高中一年級階段的課程設計與實驗教學。為進行研究，已經獲得國立中央大學附屬中壢高級中學（以下簡稱中大壢中）之教學組長（數學科）許舜淵老師同意在 107 學年之上、下學期，為中大壢中一年級學生各開設一門選修課，課名暫定為「高一微積分（上、下）」，作為新課程的實驗教學場域。所以，這兩門選修課的學生，就是本研究的參與者。以下簡略說明研究參與者的招募規劃。

■ 招募方式

以中大壢中處理選修課程的正常公告與選課程序，來招募選修的學生，也就是本研究的參與者。略有不同的是，此二門選修課並非獨立，只有修過「高一微積分（上）」的學生可以選修「高一微積分（下）」。此條件也不算是絕無僅有，所以中大壢中的教務處能夠處理此事。倒是需要特別鼓勵修了「上」的同學繼續選修「下」。換個角度來看，如果自願繼續選修「下」的學生人數遽減，就表示此課程的規劃不當，需要重新設計。

為了讓實驗對象盡量維持「常態」，已徵得許舜淵組長同意，此選修課程對全校高一學生開放，不設特定門檻也不實施前測。當預選學生過多時，運用常態編班的例行方式抽選學生。在選修課的公告程序中，以書面方式告知學生本研究計畫的背景、理念與目的，並從一開始就聲明：此課程希望學生連續選修兩個學期。

■ 課程公告與同意書草案

「高一微積分（上）」課程公告（草案）如附件一，而「微積分實驗課程參與同意書」（草案）如附件二。

「高一微積分（上）」選修課程公告（草案）

「高一微積分（上）」是中大壩中 107 學年第一學期對高一學生開放自由選修的課程，預計招收 40 名學生。此課程是中央大學單維彰教授執行教育部教學實踐研究計畫「重新設計的微積分與函數課程—從高一到大一」的高一實驗課程，而本選修班就是他的實驗教學班級。選修本課程的學生，同時也是實驗課程的研究參與者。本課程的內容規劃如下，而選修本課的學生，須同意以下義務：

- (1) 請簽署「微積分實驗課程參與同意書」。請到○○○找○○○取得空白同意書，並於○○○前完成簽署。
- (2) 請繼續選修下學期的「高一微積分（下）」，以便完成完整的實驗課程。

實驗的新課程並不會另闢微積分的學習脈絡，而會搭配現有的高一數學必修課程來發展坐標幾何、函數、微分、積分等觀念和應用。此實驗課程沒有已出版的教材，所以學習的參考資料就是課堂講義、學習單和作業。本實驗課程預計由單維彰教授親自授課 15 次，每次一節課，規劃的內容如下：

- | | |
|------------------|------------------------|
| 1. 直角坐標上的點操作 | 10. 多項式函數—以二次為例 |
| 2. 方程 vs 方程式 | 11. 多項式函數圖形的大域特徵 |
| 3. 方程式的圖形—以直線為例 | 12. 綜合除法與多項式函數的泰勒形式 |
| 4. 直線方程式與坐標操作 | 13. 多項式函數圖形的局部特徵—切線與導數 |
| 5. 直線的斜率、平行與垂直 | 14. 當泰勒形式的一次項消失—局部極值 |
| 6. 方程式 vs 函數 | 15. 徹底了解三次多項式函數的圖形 |
| 7. 自變數、應變數與函數圖形 | |
| 8. 方程式與函數圖形的坐標操作 | |
| 9. 多項式 | |

本課程與一般的數學課一樣，有作業、隨堂測驗、段考和期末考，其配分標準如下：

- 作業與隨堂測驗：共佔 40%
- 段考一、段考二、期末考：各佔 20%

微積分實驗課程參與同意書（草案）

請詳閱以下說明，若同意則請學生本人及其監護人於文件下方簽名，並於○○○前，繳回○○○。

1. 本實驗課程乃是國立中央大學單維彰教授執行之「重新設計的微積分與函數課程—從高一大到大一」教學實踐研究計畫，資助單位是教育部。本研究為期一年，研究目的是搭配臺灣現行的高中數學課程，設計新的微積分課程，並涉及函數、極限觀念的課程設計。由「高一微積分（上）」和「高一微積分（下）」兩門選修課程，組成新課程的實驗教學班級。
2. 本研究的負責人即國立中央大學單維彰教授，其個人資料及聯絡方式列於 shann.idv.tw。在中央大學的聯絡人為學習與教學研究所博士班的許哲毓先生，在中大壠中的聯絡人為教務處教學組的許舜淵組長。
3. 「高一微積分（上）」選修課程（以下簡稱本課程）對所有中大壠中一年級學生開放，且僅對這些學生開放。礙於研究倫理之規範，僅有簽署此同意書者，方能選修本課程。
4. 為維持實驗課程之品質與研究的參考價值，本課程預計招收 40 名學生。若選修人數超過預計班級人數，則由壠中教務處代以無差別待遇的公平方式選取學生。
5. 簽署本文件的學生，表示同意參與實驗課程的研究，並願意承擔以下義務：
 - (1) 像所有課程的學生一樣，全程參與課堂活動，認真學習，完成作業與評量。
 - (2) 接受研究者安排的課室旁觀與錄影，必要時接受訪談。
 - (3) 所有寫過的作業、考卷皆由研究者複印保存，當作研究材料。必要時也提供筆記給研究者複印留存。
 - (4) 除了評量試卷之外，也要認真回答問卷（每學期至多兩份）。
 - (5) 繼續選修「高一微積分（下）」。
6. 研究者承諾不在中大壠中的教務系統之外公布學生的學習表現。當研究者撰寫報告或論文時，所有學生皆會以代號表現，絕不會洩漏真實身分。
7. 退選本課程，視同退出此實驗研究。當研究者撰寫報告或論文時，將會稟報退出者人數，但不會提供其學習歷程資料。

簽署人

監護人

中大壠中高一_____班，_____號 姓名：_____（正楷書寫）

姓名：_____（正楷書寫） 與簽署人關係：_____

簽名：

簽名：

日期：民國 107 年_____月_____日

日期：民國 107 年_____月_____日

第五課 坐標算法 (4)：旋轉直角

本節討論旋轉 90 度的坐標變化。

[例 1]

求點 $P(2,1)$ 逆時鐘方向繞原點旋轉直角之後的點 P' 之坐標。

首先，旋轉不改變長度，所以 $\overline{OP} = \overline{OP'}$ 。設 $P'(x', y')$ ，令 $P_1(2, 0)$ 、 $P_2(0, y')$ 分別是 P 到 x 軸的垂足以及 P' 到 y 軸的垂足。則

$$\angle P'OP_1 = \angle POP_1 + 90^\circ = 90^\circ + \angle P'OP_2$$

所以 $\angle POP_1 = \angle P'OP_2$ ，故兩個直角三角形全等： $\triangle POP_1 \cong \triangle P'OP_2$ 。所以

$\overline{P'P_2} = \overline{PP_1} = 1$ ，而 $\overline{OP_2} = \overline{OP_1} = 2$ 。考量 P' 在第二象限，得知 $P'(-1, 2)$ 。

接下來，請同學依樣畫葫蘆。

[練習 1]

在坐標平面上，畫出點 $P(-2, 3)$ 及其以逆時鐘方向繞原點旋轉直角之後的點 P' ，然後算出 P' 的坐標。

經過兩個例子，可否觀察出來一般的結果呢？

[任務 1]

請猜想：一般的點 $P(a, b)$ 逆時鐘方向繞原點旋轉直角之後的點坐標為 _____。

想一想：當點 P 在 x 軸或 y 軸上，你猜想的公式是否正確？

[任務 2]

請猜想：一般的點 $P(a, b)$ 順時鐘方向繞原點旋轉直角之後的點坐標為 _____。

想一想：有沒有比較「聰明」的證明方法？（不必重做全等三角形）

坐標算法 (5)：行列式、方向角、平行四邊形

[定義] 行列式

在坐標平面上給定兩點 $P(a,b)$ 、 $Q(c,d)$ ，定義行列式的符號與計算規則如下：

$$[P,Q] = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(口訣：交叉相減) (「行」唸「尤」，在數學裡，直的稱「行」，橫的稱「列」)

我們知道 ΔOPQ 的面積是 $\frac{1}{2}|ad - bc|$ ，因此就是

$$\frac{1}{2}|[P,Q]| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right|$$

為了簡化符號，我們把行列式的絕對值寫成以下形式 (省略中括號)：

$$|P,Q| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = |ad - bc|$$

因此 $\Delta OPQ = \frac{1}{2}|P,Q|$ 。

雖然在三角形面積的行列式公式裡使用絕對值，也沒什麼不好。但是，我們接下來要討論取消絕對值的辦法。我們的動機是：因為

$$[P,Q] = -[Q,P] \quad (\text{口訣：}[Q,P] \text{ 是 } [P,Q] \text{ 的相反})$$

所以 $[P,Q]$ 和 $[Q,P]$ 之中，總有一個是正數 (或皆為 0，這是無聊的狀況)，我們只要能夠確保選到正的行列式就好了。所以，問題是：究竟該用 $\frac{1}{2}[P,Q]$ 還是 $\frac{1}{2}[Q,P]$ 去算 ΔOPQ 的面積呢？

我們已經嘗試過了，要討論一般性的方法，牽涉到 P 、 Q 兩點所在的象限 (當它們其中之一落在兩軸上時，是無聊的狀況，不必討論)。

[練習 2]

假設 P 、 Q 兩點分別可以隨機落在任一象限，請問共有幾種可能的配置情況？例如 P 、 Q 都落在第一象限、 P 在第一而 Q 在第二象限、 Q 在第一而在 P 第二象限，是三種不同的配置。

雖然有那麼多種配置，但是，如果 P 、 Q 一起逆 (順) 時鐘繞原點旋轉直角到 P' 、 Q' 的，當然面積不變： $\Delta OPQ = \Delta OP'Q'$ ，有趣的是行列式也不變。

[練習 3]

假設兩點 $P(a,b)$ 、 $Q(c,d)$ 逆時鐘繞原點旋轉直角到 P' 、 Q' ，再旋轉一次到 P'' 、 Q'' 。試求 $[P,Q]$ 、 $[P',Q']$ 、 $[P'',Q'']$ 。（ P'' 唸 P double prime）

因為以上性質，所以我們可以「不失一般性」地規定點 $Q(c,d)$ 在第一象限，意即 c 和 d 均為正數。點 P 固然可以在任意象限，但是根據第四課的經驗，只需討論兩種情形：點 P 落在 OQ 直線的右邊或左邊（點 P 落在 OQ 直線上的無聊狀況，稍後討論）。

[任務 3]

令 L 為過 $P(a,b)$ 點而平行於 $\overline{OQ}$ 的直線，其中點 $Q(c,d)$ 在第一象限， L 交 x 軸於 $P_1(a',0)$ 。分成四組，針對 P 在 $\overline{OQ}$ 左側且在上半、下半平面，以及在 $\overline{OQ}$ 右側且在上半、下半平面，各做一條從 a, b, c, d 計算 a' 的公式。

當 P 在 $\overline{OQ}$ 右側時， $a' > 0$ ，所以 $\Delta OPQ = \frac{1}{2}a'd = [P,Q]$ ，而當 P 在 $\overline{OQ}$ 左側時， $a' < 0$ ，所以 $\Delta OPQ = \frac{1}{2}(-a')d = [Q,P]$ 。但是別忘了 Q 未必在第一象限，而 P 、 Q 的相對關係若要不受旋轉影響，就得關注它們在旋轉意義之下的前後關係了。把線段 OP 和 OQ 想像成時鐘上的時針和分針，現在我們知道「去絕對值」的辦法了：

做行列式的順序，就是逆時鐘旋轉的順序。

慢慢說明於下。

[定義] 夾角

給定異於原點的相異兩點 P 和 Q ， OP 射線和 OQ 射線的夾角，記作 $\angle POQ$ 是指劣角，意即不超過平角的角。（複習：零角、直角、平角、周角、補角、餘角、優角）

所謂「夾角」並沒有方向性（沒有正、負），就好像長度、重量那樣，都是單純的「量」，最少就是沒有（零）。現在我們要賦予「角」方向性。

[定義] 方向角

給定異於原點的相異兩點 P 和 Q 且 $\angle POQ = \theta$ 時，若 OP 射線以逆時鐘方向旋轉 θ 達到 OQ 射線，稱 OP 到 OQ 的方向角為 $+\theta$ ，簡記為 θ ；相反地， OQ 到 OP 的順時鐘旋轉方向角為 $-\theta$ 。若 OP 到 OQ 的方向角為 α ，則 $\angle POQ = |\alpha|$ 。（ α 是小寫的希臘字母，唸 alpha，相對於拉丁字母的 a）

[定理] 三角形面積的行列式公式

給定坐標平面上兩點 P 和 Q ，若 OP 射線旋轉到 OQ 射線的方向角為正（逆時鐘旋轉一個劣角），則

$$\Delta OPQ = \frac{1}{2}[P, Q], \text{ 否則 } \Delta OPQ = \frac{1}{2}[Q, P]. \text{ 若不確定旋轉的方向, 則 } \Delta OPQ = \frac{1}{2}|[P, Q]|.$$

[作業]

1. 假設點 $P(a, b)$ 在第四象限，令其以逆時鐘方向繞原點旋轉直角之後的點為 P' ，試證明 P' 的坐標如任務 1 的結論。

2. 針對以下三點為頂點的三角形，寫出順序正確的行列式以計算其面積：

(1) 點 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, -2)$ ，

(2) 點 $(0, 1)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(1, -2)$ 。

3. [定義] 兩邊決定的平行四邊形

給定不共線相異三點 P 、 Q 和 R ，由線段 PQ 和 PR 「決定」的平行四邊形為 $PQSR$ ，

其中 QS 平行於 PR 且 $\overline{PR} = \overline{QS}$ ， RS 平行於 PQ 且 $\overline{PQ} = \overline{RS}$ 。

在坐標平面上給定兩點 $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，試寫出由 OP 和 OQ 決定的平行四邊形面積公式。其中 O 表示原點。

4. 設 P 、 Q 、 R 三點坐標依序為 $(0, 1)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(1, -2)$ ，畫出由 QP 和 QR 決定的平行四邊形，然後寫出順序正確的行列式以計算其面積。

第六課 數學的學習工具

請同學們以後隨身攜帶基本的學習工具。

1. 直尺。有刻度，15 公分就夠了。同時具備公分和英吋單位也好。
2. 三角板，其中一角是直角，另外兩角隨便。
3. 量角器，半圓形的。
4. 圓規，輕便的即可，不必很精確。
5. 方格紙。有方格紙筆記本嗎？
6. 計算機 (Calculator)，隨便一款「工程型」且價格不超過 500 元皆可，以輕薄短小為原則。（看到鍵盤上有 $\sin$ 和 $\log$ 這兩個鍵。）可以暫時用手機裡的 App 取代。
7. Desmos App，請安裝在手機裡。教師示範使用網頁版。

作業 3 檢討

第 (i) 小題，其實是我筆誤了，我的意思是問 $\lim_{y \rightarrow 6} \frac{y-6}{y^2-36}$ ，只是想要同學發現：除了 $y=6$ 以外，

$\frac{y-6}{y^2-36} = \frac{1}{y+6}$ 恆成立，而 $z = \frac{1}{y+6}$ 的圖形（ y 在橫軸、 z 在縱軸）在 $y=6$ 附近是「連續」的，所以就

代入 $y=6$ 得到 $\lim_{y \rightarrow 6} \frac{y-6}{y^2-36} = \lim_{y \rightarrow 6} \frac{1}{y+6} = \frac{1}{12}$ 。

可是題目不小心寫成了 $\lim_{y \rightarrow 6} \frac{y+6}{y^2-36}$ ，簡單的作法是 $\lim_{y \rightarrow 6} \frac{y+6}{y^2-36} = \frac{12}{0}$ 不存在，而「標準」的作法是

畫 $z = \frac{y+6}{y^2-36} = \frac{1}{y-6}$ 的圖形，它是將 $z = \frac{1}{y}$ 的圖形向

右平移 6 單位（請畫在右邊）。圖形在 $y=6$ 徹底斷掉，不是「僅缺一點」而已。所以說極限不存在。

第 (l) 小題令 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 3 \\ 3x-7, & x > 3 \end{cases}$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 建議

如此思考：在 $x \leq 3$ 時，函數圖形是「半條」直線，圖形是「連續」的；同理，在 $x \geq 3$ 時也是連續的，而它們在 $x=3$ 時接在一起了，所以整個圖形是「連續」的折線。引用連續函數的極限定理，極限存在而且就是 $f(3)=2$ 。請畫圖在右邊：

第 1 題 $\left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right]$ ，就是微分除法律，要適度化簡；我再做一遍...。第 2 題要使用符號 a ，根據 $f'(a)$

的極限定義列式：

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}, \text{ 其中 } x, a \text{ 皆為正數}$$

把分母轉化為 $x - a = (\sqrt[n]{x})^n - (\sqrt[n]{a})^n$ ，然後運用基本的多項式分解公式：

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1})$$

第 (a) 小題 $\lim_{x \rightarrow 6} 7$ 很單純，不要被唬了。它要做函數 $y=7$ 在 $x=6$ 的極限，而 $y=7$ 是常數函數（零次多項式函數），它本身的圖形在 $x=6$ 附近是「連續」的，所以代入 $x=6$ 即可。吳珣皜、李子曦、譚秉宏、黃奕苜、黃彥鈞、鄧皓宇，請重/補交作業 3。鄭余州、郭駿霆、趙昱程，請重交作業 3 的第 2 題。我會補成績給你們。

兩週前，希望 104 班的桌機安裝 Maxima。安裝了嗎？如果裝好了，我們用它驗算以下練習。

[練習 1]

(1) 試求 $\left[\frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right]'$ ，其中 $x > 0$ 。（微分除法律 $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 與連鎖律）

(2) 試求 $F(x)$ 使得 $F'(x) = \sqrt{x}$ 。

第九課 萊布尼茲符號

回顧導數的極限定義：

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

我們用 Δx 表示 x 和 a 的（有向）差： Δ 唸 delta，是希臘的字母 D，作為「差」Difference 的縮寫。類似地，如果 $y = f(x)$ ，我們用 Δf 或 Δy 表示 $f(x)$ 和 $f(a)$ 的差。因此，導數的定義就成了

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

注意 $x \rightarrow a$ 改寫成了 $\Delta x \rightarrow 0$ 。我們知道，此時分子也同時 $\Delta y \rightarrow 0$ ，極限是 $\frac{0}{0}$ 的狀況。因為 $x \neq a$ ，所以 Δx 畢竟 $\neq 0$ ，只是非常接近 0。換句話說， Δy 和 Δx （的絕對值）都不是 0 而是「很小很小」。萊布尼茲把它們分別改寫成 dy 和 dx ：differential y 和 differential x 。「differential」的學名是「微差」，而英文 d 恰好是中文的「滴」，所以 dy 和 dx 的俗名就是「一滴滴的 y 」和「一滴滴的 x 」。萊布尼茲就把導數寫成了

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a}$$

而導函數就順理成章地寫成了

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

現在，我們總算知道「微分」這個名詞的意思了：「微差的分式」。中國也稱之為「微商」：微差的商。以上分式唸「 $d y$ over $d x$ 」。

萊布尼茲（Leibniz, 1646—1716）比牛頓小四歲，卻早死了十年。他在學術界的名氣，主要是哲學家，也有時被尊為外交家、文學家、史學家、甚至於「漢學家」。他在 26 歲才開始對數學發生興趣，那時候（西元 1672 年）牛頓其實早已發展出「流數術」了，可是只有英國的一小撮人知道，並沒有流傳到法國。而萊布尼茲在五年之中發展出他自己的「微分」概念，和以上符號系統。他在 1684 年發表了世界上第一篇微分論文，這件事把牛頓和英國人氣炸了，引爆了英國和法國之間的另一場戰爭。在他們的有生之年，牛頓大獲全勝，萊布尼茲淒涼而終。可是現在人們認為他倆平分秋色，都是「一時瑜亮」。

後來，數學家進一步把 $\frac{dy}{dx}$ 拆成了 $\frac{d}{dx}y$ 或者 $\frac{d}{dx}f(x)$ ，於是獨立出來 $\frac{d}{dx}$ 這個符號，就是「對 x 微分」的意思了。例如 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ， $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ， $\frac{d}{dx}(-5) = 0$ 。

[練習 2]

(1) 試求 $\frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$ ，其中 $x > 0$ ；(2) 試求 $\frac{d}{dx}(x-a)^n$ 。

第十課 微分連鎖律

先教大家怎麼使用「連鎖律」(Chain Rule)，下回再證明。連鎖律就是用來解決像 $\sqrt{x^2+1}$ 這種函數的微分需求。

以前已經知道 $\frac{d}{dx}(x-a)^n = n(x-a)^{n-1}$ 。用連鎖律的方式來做，就是先把 $y = (x-a)^n$ 拆解為兩個函數的合成： $y = u^n$ ，而 $u = x-a$ 。然後把微分做「分式運算」：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

於是

$$\frac{d}{dx}(x-a)^n = \left(\frac{d}{du}u^n\right) \cdot \left(\frac{d}{dx}(x-a)\right) = nu^{n-1} \cdot 1 = n(x-a)^{n-1}。$$

[示例 1]

試求 (1) $[(ax+b)^n]'$ ，(2) $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}$ 。

[解] (請抄筆記)

【如果時間剩下得多，就帶著學生一起做作業。】

作業 5

1. 令 $f(x)$ 與 $u = g(x)$ 定義如下，先寫出 $y = f(g(x))$ 的函數式，然後令 $y = f(u)$ ，用 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 算出導函數 $f'(g(x))$ 。

(a) $f(x) = x - 1, g(x) = x^3$

(b) $f(x) = x^2 - x + 5, g(x) = 4 - x$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - 4$

(d) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 + 1$

(e) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2 + 1$

(f) $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = x^2 + 1$

2. 試將以下函數拆解成 $y = f(u)$ 、 $u = g(x)$ ，然後算出導函數 $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))$ 。（拆解的方法不一）

(a) $y = (x^2 - 4x)^5$

(b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

(c) $y = (x - 3)^2 + 4\sqrt{x - 3}$

(d) $y = \sqrt{9x^2 + 16}$

(e) $y = 1 + (2x + 9)^{-1}$

(f) $y = \frac{1}{(x^2 - 5x + 6)^3}$

(g) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

(h) $y = \frac{1}{\sqrt{3x - 1}} + \sqrt{3x - 1}$

正本

檔 號： /041000/01

保存年限：10

國立中央大學 函(稿)

地址：32001桃園市中壢區中大路300號

承辦人：邱創傑

電話：03-4227151分機33857

電子信箱：jenner@cc.ncu.edu.tw

受文者：如行文單位

發文日期：中華民國108年9月10日

發文字號：中大文師字第1083000258號

速別：普通件

密等及解密條件或保密期限：

附件：

主旨：本校師資培育中心單維彰副教授至貴校進行臨床學習，懇請同意辦理，請惠允見復。

說明：

- 一、依據教育部107年7月20日臺教師(二)字第1070090455號令訂定發布之「106年度起之大學校院師資培育評鑑計畫」辦理。
- 二、該計畫附錄C大學校院師資培育評鑑指標內涵表，明定教師質量及課程教學之標準，其中包含如下項目：
 - (一)「4-2-1.專任教師與教學現場合作進行自我增能，確保教學內容符應教學現場需求。」
 - (二)「4-5-1.師資培育機構有關教學實務（如分科/領域教材教法、分科/領域教學實習、臨床教學、教學法相關研究等）授課之專兼任教師具有符合所任教類科之中等以下學校任教教師實際或臨床教學經驗。」
 - (三)皆涉及師培機構教師與教學現場合作、組成專業成長社群，並具備臨床教學經驗。
- 三、臨床學習期間為108學年度，將於每周前往貴校半天，懇請貴校協助提供高一數學科教師、數理班教學等相關實務之臨床學習機會。

正本：桃園市立大園國際高級中等學校

副本：本校師資培育中心

會辦單位：

決行層級：第二層決行

校對

監印

封發



圓的「局部」圖形

這一節課，我們要「發現」圓切線跟圓的「局部」關係。以下，先複習一些觀念。

[定義] 圓的法線與切線

令 $P(x_0, y_0)$ 為圓 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上一點，則圓 C 在點 P 的法線為通過圓心與點 P 的直線 N ，圓 C 在點 P 的切線為通過點 P 且垂直於法線的直線 T 。它們的點斜式如下：

$$N: \frac{y-b}{x-a} = m, \quad T: \frac{y-b}{x-a} = -\frac{1}{m}, \quad \text{其中 } m = \frac{y_0-b}{x_0-a} \text{ 為法線斜率}$$

注意，當點 P 為「南北極」時，意即 $P(a, b \pm r)$ ，法線斜率 m 不存在，表示法線為鉛垂線，此時切線為水平線。反之，當 $m=0$ 時，切線斜率不存在，表示法線為水平線，而切線為鉛垂線。法線的英文是 normal line，切線是 tangent line。

[定義] 單位圓 (unit circle)

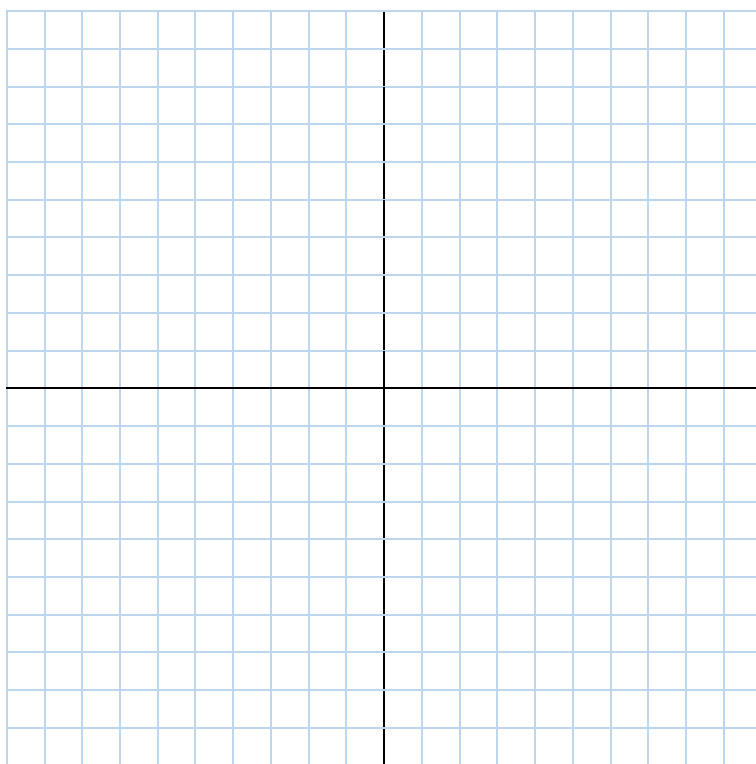
當圓心是原點，半徑是 1，此圓 $C_0: x^2 + y^2 = 1$ 稱為單位圓。

[任務]

全班分 7 組，每組 5 人，分別針對單位圓上的 7 點（如下），執行以下任務。

$$P_1(1,0), P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_3(0.6, 0.8), P_4(0,1), P_5(-0.8, 0.6), P_6(-0.6, -0.8), P_7(0.8, -0.6)$$

- (1) 求單位圓 C_0 在點 P_k 的切線斜率：_____，各組設定自己的 k 為 1、2、...、或 7。
- (2) 令次頁的方眼紙的正中央格點為 P_k ，畫上黑豆。令方眼紙每格寬、高皆為 0.001，在方眼紙的下緣的左、右標示 x 坐標，在方眼紙的左緣的下、上標示 y 坐標。
- (3) 畫出 C_0 在方眼紙範圍內的任意相異 5 點，或更多點。
- (4) 根據畫出的點，描繪 C_0 在方眼紙範圍內的圖形。
- (5) 剩下的任務，在課堂中宣布，請自行記錄在以下空白處。

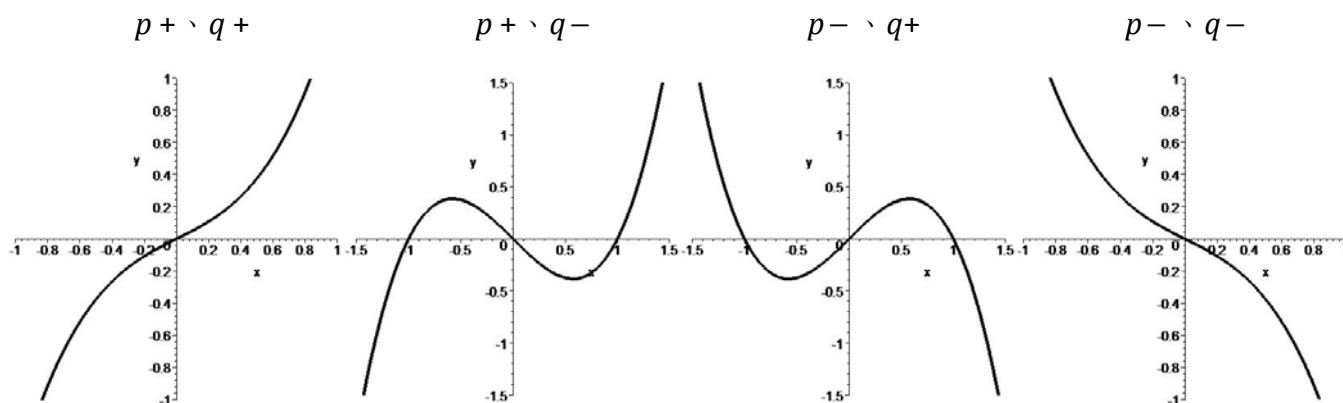


方程式的「局部」圖形

令 $P(x_0, y_0)$ 是某方程式（或函數）圖形 Γ 上的一點，意即 $x = x_0$ 和 $y = y_0$ 「滿足」方程式。以點 P 為「中心」或「參考點」的方程式「局部」（local）圖形，是一個「不嚴格」的定義，意思是說，假如 h 是一個頗小的正數，例如 $h = \frac{1}{100}$ 或 $h = \frac{1}{1000}$ 或更小，則 Γ 在 $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ 、 $y_0 - h \leq y \leq y_0 + h$ 這個小正方形區域內的圖形，就是 Γ 以點 P 為中心的局部圖形。

我們已經知道二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (當我們說 f 是「二次」函數就意味著 $a \neq 0$) 必有最大或最小值, 並且看過此性質的應用問題: 這一類型的應用問題, 涉及某個函數 $f(x)$ 在某個範圍 $x \in [a, b]$ 內的最大或最小值, 通稱為最佳化問題 (optimization)。現在要把最佳化問題擴充到三次函數。

因為三次函數的大域圖形會無限上升也會無限下降, 所以三次函數沒有最大或最小值。我們知道一般的三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 其必然是奇函數 $g(x) = px^3 + qx$ 的平移, 而 g 的圖形只有以下四種典型:



其中兩種典型稱為「單調」, 另外兩種則「有轉折」。當三次函數的圖形有轉折的時候, 因為圖形的對稱性, 必然有一個峰和一個谷。此時, 我們有以下定義。

[定義] 極值

令 $f(x)$ 為一多項式函數, x_0 是 f 的一個臨界點。

- (1) 如果 f 的圖形在 x_0 左側遞增、右側遞減, 稱函數 $f(x)$ 在 x_0 發生相對極大值 $y_0 = f(x_0)$ (Relative Maximum), 簡稱極大值;
- (2) 如果 f 的圖形在 x_0 左側遞減、右側遞增, 稱函數 $f(x)$ 在 x_0 發生相對極小值 $y_0 = f(x_0)$ (Relative Minimum), 簡稱極小值;
- (3) 極大值或極小值, 合稱為相對極值 (Relative Extrema)。最大值、最小值、極大值、極小值合稱極值 (Extrema)。

[範例 1]

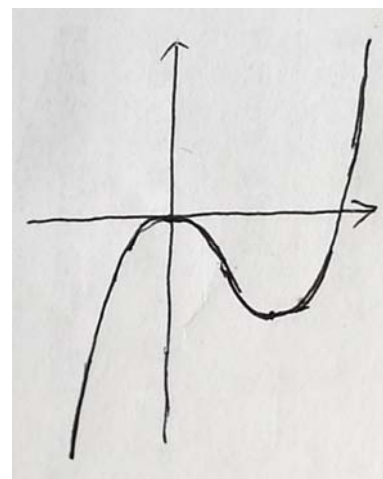
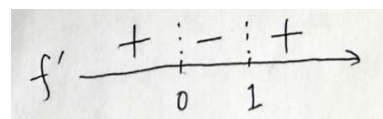
求函數 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ 的極值。(如果有, 發生在哪裡? 是多少?)

[解] 先求 f 的臨界點, 也就是求 $f'(x)$ 的根, 或者說 $f'(x) = 0$ 的解。得到兩個臨界點 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 1$ 。從 f' 的不等式結構圖得知 f 在 x_1 發生極大值, 在 x_2 發生極小值。極大值是 $f(0) = 0$, 極小值是 $f(1) = -1$ 。

例 1 的函數 f 的草圖如右。從圖得知 f 無限地往上、往下延伸, 所以它沒有最大值也沒有最小值。只有相對極大(也就是峰)和相對極小(也就是谷)。

[練習 1]

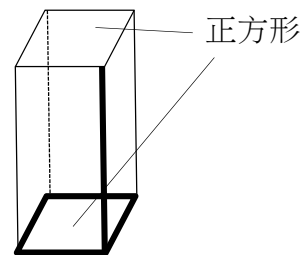
求函數 $f(x) = x^3 + x^2 - x$ 的極值。(如果有, 發生在哪裡? 是多少?)。



當然我們可以用 Desmos 或其他工具直接「看到」 f 的圖形，也就看得出來極值發生在哪裡。可是電腦只能讓我們看到大約的數值，用微分可以算出精確值；重要的事情倒也不是精確值，而是未來更高深的學習。

[範例 2]

國際郵遞公約規定，航空包裹的「總長」不得超過 108 英吋。在總長為 108 英吋的前提下，設計一個底部為正方形的長方體紙盒，使其體積最大。體積最大是多少立方英吋？此時底部正方形的邊長是多少英吋？（總長的定義是「底部」的周長加上「高」，而「高」的定義是長方體最長的那一邊。）



粗體部份總和即為「總長」

[解] 設底部正方形的邊長為 x ，且設包裹的總長達到最大值 108 英吋，則高為 $H = 108 - 4x$ 。此時的體積是 $V = x^2 H$ ，欲求 V 的最大值。

可見求極值的函數為 $f(x) = 108x^2 - 4x^3$ ，其臨界值為 $216x - 12x^2 = 0$ 之解： $x = 18$ 或 0（不合）。體積 $V = f(x)$ 在 $x = 18$ 發生極大值，但是合情境的自變數範圍是 $x > 0$ ，在此範圍內， V 確實發生了最大值（請繪製草圖以觀察）。最大值是 $f(18) = 11,668$ 。故當底部正方形的邊長為 18 英吋時，包裹的體積達到最大的 11,688 立方英吋（大約 191.5 公升）。

由以上例題可知，雖然三次函數在整個實數裡沒有最大、最小值，但是在限制範圍內，卻可能有最大或最小值。同理，二次函數在整個實數裡只有最大或最小值，不會同時都有，但是在限制範圍內卻可能都有。例如 $y = x^2$ 的最小值是 0，本來沒有最大值；可是如果限定在 $x \in [-1, 2]$ 的範圍內，則最小值是 0、最大值是 4。所以，在限制範圍內求最大、最小值時，要配合函數圖形來觀察。

解決最佳化問題的一般性步驟如下。

1. 決定自變數。因為高中生僅能處理一個變數的問題，所以如果題目中看似有兩個變數，則它們之間一定有關係，最後必定可以用一個變數來解決問題。例如在範例 2 中，看似有兩個自變數：底部正方形的邊長 x 、包裹的高 H 。可是因為它們符合 $4x + H = 108$ 之關係，所以 $H = 108 - 4x$ ，故只有一個自變數 x 。
2. 將欲求極值的對象寫成自變數的函數 f 。例如在範例 2 中，所求是體積的最大值，而體積 $V = x^2 H$ ，故欲求極值的函數是 $V = f(x) = 108x^2 - 4x^3$ 。
3. 考慮情境中對於自變數的限制，可先觀察函數 f 在限制範圍內的圖形，然後以微分方法求得極值發生的 x 及其對應的極值。
4. 如果答案是无理數，視情況取其概數。
5. 記得最後要以完整的句子，寫答案。例如範例 2 的答案是「當底部正方形的邊長為 18 英吋時，包裹的體積達到最大的 11,688 立方英吋」。

座號：_____ 姓名：_____

1. 試做 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x$ 以 1 為參考點的泰勒多項式。

2. 在河邊用長 1200 公尺的繩子圍出一塊長方型區域，這塊長方型區域面積最大會是多少平方公尺？此時長和寬分別是多少公尺？（假設河岸是直線，河邊不必圍繩子。）

3. 將一根直徑為 45 公分圓柱形的原木裁切成剖面為長方形的木樑，設其寬為 x ，高為 y ，而且 $x < y$ 。根據力學定律，木樑在其縱面上可承受的質量（公斤），正比於 xy^2 。若已知這種木材的比例常數為 $1/17.3$ ，求裁切的寬與高，使得木樑能承受最大質量；此時大約能承受幾公斤？
（意思是說木樑可承受 $F = \frac{1}{17.3}xy^2$ 公斤。）