

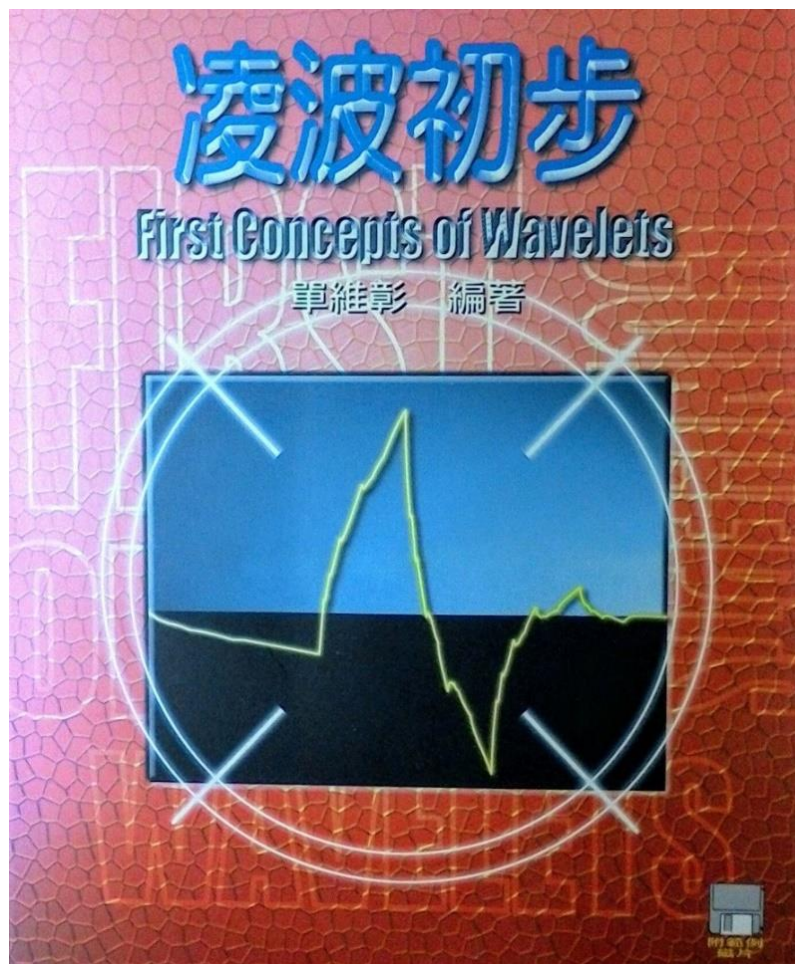
單維彰師鐸獎評選佐證資料 5

凌波初步樣書與羅孟宗教授推薦函

《凌波初步》這本書由全華圖書公司於 1998 年出版，430 頁；我當年 36 歲。此書在當時極受好評，第一刷（1000 本）在半年內售罄。這本書幫助了許多資訊領域的同仁和學生。例如，我在建國中學的數學恩師賴敦生的公子，當時在台科大讀碩士學位，跟隨指導教授研究凌波，一天，教授拿著剛出版的《凌波初步》跟團隊說：「我們一直搞不懂的所有問題，這本書全都回答了。」

非常幸運地，在 2025 年 8 月 29 日中央大學擴大行政會議的午餐桌上，生醫科學與工程學系羅孟宗特聘教授（兼系主任）主動向我提起他當年讀這本書感受到「知識的樂趣」，不但在數學知識與訊號處理技術上有幫助，就連後來的學術生涯也深受影響，如今他也用那種「樂趣」的精神來教學。這真是作為一名教師、一名作者，最幸福的收穫。不久之後，羅教授獲 114 年國科會傑出研究獎的消息傳來，全校咸與慶賀。

在此份佐證資料中，我先呈現羅孟宗教授為我寫的推薦函（也是此書讀者的見證），然後節錄書籍的部分內容：特別是關於 Lebesgue 積分的那一小節，因為那裡有對 Lebesgue 深奧理論非常深入淺出而且有創意的引介，獲得許多讀者的讚許。



MEN-TZUNG LO, PH.D.

TEL: 03-422-7151#27758

DISTINGUISHED PROFESSOR OF DEPARTMENT OF BIOMEDICAL SCIENCE AND ENGINEERING

E-MAIL: mzlo@ncu.edu.tw

DIRECTOR OF CENTER OF BIOMEDICAL ENGINEERING

承蒙維彰老師垂詢，得以藉此機緣，略陳胸臆，為《凌波初步》一書作薦，實為愚生之榮，亦是一段久違而深刻的回望。

推薦此書之際，不免令人追憶博士班研究歲月。對多數研究者而言，那段時光或可謂學術生涯之初戀——甘苦雜陳，而情深意長。猶記博士後期，因研究所需，必須處理非穩態訊號分析；當時於臺大電機，從事相關研究者寥寥可數，遂只得自學時頻分析。短時傅立葉轉換尚可循理而入，然及至小波理論，則屢感艱澀。彼時雖知數學系陳宜良老師為此中大家，然緣分未至，加以研究主軸未必非此不可，終仍選擇獨自循文獻摸索。奈何資質有限，進境殊緩。

正於此時，偶於書店翻得單維彰老師所著《凌波初步》。彼時正困於 Mallat、Ingrid 等鉅著之中，觀之似懂非懂，心中混沌；然翻閱此書，竟彷彿於迷霧中見得一線微光。此亦是愚生購得之第一本小波專書。由此始，對該領域漸生興趣，並因而開啟日後與黃錫院士於泛小波領域長年鑽研之因緣。單老師雖非愚生之授業恩師，然其書所播之啟迪之種，至今仍深植心田，感念不已。

《凌波初步》之可貴，正在於其不具尋常教科書之匠氣。讀其書，亦可觀其人。初讀之時，常不禁想像作者之學養與胸襟。此書不僅傳遞 wavelet 之基礎知識，更可貴者，在於作者將自身思考脈絡一併鋪陳於行文之中。無論「波蓋」之譯名，抑或「凌波」之寓意，皆令人獲得超越字面之體悟。

愚生出身電機通訊領域，於數學之體會，或較一般電機學生稍深一層；然相較於抽象數學之堂奧，仍覺高不可攀。而《凌波初步》恰恰在兩者之間，搭建了一座可親可行之橋樑，使末學得以循階而上。單老師於「渡人」之道，誠有深得。隨著愚生自身從事教育工作年歲漸長，對此體會愈深，敬佩亦日增。時至今日，愚生之課堂教材，仍多所取法於此書。

愚生常與學生言：教師之責，非僅在傳遞知識，更在於傳遞思維之方式；師生相感，教學相成，方能使學問真正生根。若師生有緣，於某一堂課、某一概念中，學生得以體會教師之思考路徑，從而生發興趣，乃教學中至美之事。此一體悟，正是《凌波初步》留給愚生最深遠的影響。

謹此，亦誠摯祝福單維彰老師獲本校推薦參與師鐸獎之甄選。師鐸之榮，重在育人樹人；以愚生長年受其書澤之所見，單老師於啟迪後學、化育人心之成就，實當之無愧。爰書數語，以表敬意，並致由衷祝福。



國立中央大學
National Central University



國立中央大學生醫科學與工程學系
Department of Biomedical Sciences and Engineering

MEN-TZUNG LO, PH.D.

TEL: 03-422-7151#27758

DISTINGUISHED PROFESSOR OF DEPARTMENT OF BIOMEDICAL SCIENCE AND ENGINEERING

E-MAIL: mzlo@ncu.edu.tw

DIRECTOR OF CENTER OF BIOMEDICAL ENGINEERING

敬祝

教安

國立中央大學生醫科學與工程學系

桃園縣中壢市中大路 300 號

羅孟宗

電話：03-4227151 轉 27756

電子郵件：mzlo@ncu.edu.tw

前言

每一本書有它的使命。

這本書所企圖的使命有三：

- (1) 提倡以凌波當做 *wavelet* 的中文譯名。詳見第一章十三節。
- (2) 綜合整理入門的數學預備知識、凌波函數理論與應用方法之實作示範，並盡量降低數學的複雜度，希望能幫助非數學背景的學生或專業工作者，進入凌波函數論的創作與應用領域。
- (3) 將凌波函數的基本理論與應用範例，導引至大學和工專學生能力可及的範圍。使得這一門在將來可能會和傅立葉分析一樣被廣泛應用的數學科目，能夠及早成為大學部的選修課程。

基於上述之前兩項使命，這本書必須以中文寫作，而且假設講述的對象，僅僅具備普通的微積分和線性代數之數學基礎。這是在製作這本書的時候，所面臨的最大挑戰。在中文方面，因為長期以英文作為專業領域內之讀寫語言，使得我的中文語句非常不純正——尤其在談數學的時候。所以，在構句之時，但求詞意明確而不敢參言優美。在數學方面，我採取直覺、類比與描述動機的方式，帶領讀者以較快的步伐進入足夠抽象化的領域，而遺漏許多與主題不太相關的細節。我們只求讀者對於這些數學概念感到不陌生、會使用，而不能傳授一套完整的數學理論。如果您發現了中文不通順或者數學不正確之處，請直接給我建議。

在內容上，第一章利用很簡單的方盒函數和 Haar 函數，提示整個凌波理論的發展動機、理論要點和應用方式。第二章先複習線性代數與微積分中，跟本書內容比較相關的課題；然後分幾個單元介紹較深

的數學課題。第三章詳細而且完整地呈現正交凌波函數的基本理論。雖然我們沒有論及其他族群的凌波函數，但正交理論是各種凌波理論的共同基礎。第四、五章分別示範凌波函數在訊號處理與數值計算方面的應用。整本書的演算法都以 Matlab 當做實作平臺。在附錄中我們簡介 Matlab 的相關指令。

在結構上，第一章是低解析度的粗略概論，第三、四、五章則分三個主題，做高一層解析度的細述。第二章補足兩層解析度之間的差距。更高解析度的內容，就不在這本書裡了。這種「多層次結構」的安排，正反映了凌波函數的精神，是許進超教授提示給我的。

書中的某些文字或圖片，取自鄭儘女士或嚴健彰、徐敏堂、曾正男、陳聲偉、蘇智穎五位先生的碩士論文。書中更有許多觀點，得自於和陳宜良教授、以及與前述六位研究生長期之研討結果。這些材料融於一爐很難一一指出，故在此一併聲明並致謝。

感謝嚴健彰、邱建明、吳舒婷、郭嘉慧，幫我校閱初稿、搜尋資料、製作美工圖片與函數圖形。在初版之後，還要感謝李宗元教授和鄭光哲先生的熱心指正。他們大量降低了這本書的失誤。但是所有漏網而出的錯誤，仍是作者我一個人的責任。

更要感謝我的家人在這段時間的諒解。這種話好像例行公式，若非親身經歷，確實難以理解個中的深義。

最後，要特別感謝中央大學數學系的陳弘毅教授。這整本書，除了封面以外，所有的排版與設計，完全是由陳教授的中文 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 數學文件排版系統製作出來的。因為這套中文 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 系統，使得中文的數學寫作成爲一件賞心悅目的樂事。

單維彰 中央大學數學系

一九九九年八月於臺灣中壢

<http://www.math.ncu.edu.tw/~shann>

章 節 目 錄

前言	iii
章節目錄	v
圖例目錄	ix
重要程式目錄	xiii
重要數學式目錄	xv
第一章 一階凌波導覽	1
1.1 方盒函數	1
1.2 函數間的距離	3
1.3 階梯函數的逼近論	5
1.4 大 O 符號	10
1.5 函數的脹縮平移	12
1.6 階梯函數空間	14
1.7 抽象化的向量空間	17
1.8 多層解析空間	21
1.9 投影	22
1.10 正則基底	26
1.11 Haar 函數	29
1.12 多層解析空間的基底變換	33
1.13 凌波函數	37
1.14 Haar 凌波係數消散定理	39
1.15 數位訊號處理	44
1.16 DWT: 離散凌波轉換	47

1.17 DWT 之矩陣表達	55
1.18 DWT 演算法	61
第二章 數學理論基礎—複習與預習	71
2.1 基本符號與慣例	72
2.2 泰勒展開	74
2.3 向量空間	79
2.4 基底	81
2.5 向量的長度	85
2.6 向量的內積	91
2.7 再談基底	96
2.8 L^2 空間	102
2.9 勒貝格積分	112
2.10 疊積	119
2.11 傅立葉級數	122
2.12 傅立葉轉換	136
2.13 基本樣條函數	148
第三章 正交凌波理論概述	155
3.1 自格函數	156
3.2 自格係數	160
3.3 充分條件	164
3.4 凌波函數	167
3.5 凌波係數消散定理	179
3.6 再談自格係數	189
3.7 凌波轉換	193
3.8 傅立葉分析與頻譜	199

3.9	頻譜與尺度	203
3.10	相位平面	210
3.11	凌波轉換與泰勒展開	219
3.12	特徵函數	221
3.13	凌波函數與多項式	229
第四章	正交凌波函數的訊號處理範例	239
4.1	離散凌波轉換 (DWT)	240
4.2	離散凌波轉換 (DWT) 之矩陣表達	242
4.3	一維離散凌波轉換—演算法	246
4.4	一維離散凌波轉換—範例	260
4.5	與傅立葉轉換之比較	270
4.6	二維離散凌波轉換—演算法	278
4.7	二維離散凌波轉換—範例	287
4.8	CZO 型式的測試矩陣	299
4.9	一個數學之外的問題	308
第五章	正交凌波函數的數值運算範例	311
5.1	繪製 V_j 中的函數圖形	311
5.2	函數插值與投影	320
5.3	自格與凌波函數的數值	328
5.4	自格與凌波函數的圖形	337
5.5	數值積分	353
5.6	自格函數與多項式的積分	358
5.7	自格函數的連乘積分問題	369
5.8	自格函數的數值積分法	377
5.9	傅立葉技巧	385

附錄 計算工具	393
A.1 Matlab 概要	394
A.2 Matlab 的製圖功能	403
A.3 Matlab 的顯像功能	408
後記	415
參考書目	417
英漢名詞對照	419
索引	421

圖 例 目 錄

圖 1	方盒函數	2
圖 2	$f(x)$ 和 f_0 、 f_1 、 f_5 、 f_6 的逼近情形	9
圖 3	函數脹縮平移之圖例	13
圖 4	垂直投影的圖示	19
圖 5	Haar 函數	31
圖 6	兩層尺度間的分解與合成圖示	34
圖 7	一維 Haar 凌波分解的例子	65
圖 8	一維 Haar 凌波合成的例子	66
圖 9	二維 Haar 凌波分解的例子	67
圖 10	微分均值定理圖示	78
圖 11	ℓ^1 、 ℓ^2 、 ℓ^∞ 長度意義之下的單位圓	87
圖 12	$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ 內積意義之下的正交向量	95
圖 13	平面上的一對對偶基底	101
圖 14	勒貝格積分與黎曼積分圖示	115
圖 15	積分理論發展之示意圖	117
圖 16	發現 Gibbs 現象的不連續週期函數	130
圖 17	Gibbs 現象，取二十項或四十項部分和	131
圖 18	十六項傅立葉級數部分和	133
圖 19	$B_2(x)$ (三角帽函數)	150
圖 20	中間值定理不成立之範例	165
圖 21	高低頻係數測試函數	200
圖 22	豎笛與小喇叭的頻譜分析	202

圖 23	兩種尺度的 $\phi(2^j x - k)$	205
圖 24	理想中 V_{j+1} 、 V_j 、 W_j 之頻率反應範圍	209
圖 25	五線譜就是相位平面上的一個函數	211
圖 26	相位平面上之各種有效函蓋示意圖	216
圖 27	鋼琴的音階與頻率	218
圖 28	$p = 2, 4, 6, 8$ 的 $ m_0(\omega) $ 在 $[-\pi, \pi]$ 之內	234
圖 29	$p = 2, 4, 6, 8$ 的 $m_0(\omega)$ 在複數平面上的曲線	236
圖 30	$f(x) = x$ 的原始訊號與轉換後訊號	262 263
圖 31	$\cos x$ 的轉換後訊號	264
圖 32	一維測試函數	265
圖 33	一維測試訊號的 $\frac{1}{8}$ 解析度	266
圖 34	凌波轉換後的一維測試訊號	267
圖 35	凌波縮減除雜訊法之示意圖	269
圖 36	$H(x) - H(-x)$ 的 16 項與 50 項傅立葉級數	272
圖 37	數值黏滯性之圖例	273
圖 38	$H(x) - H(-x)$ 在 V_2 和 V_4 的正交投影	275
圖 39	一維測試訊號以 FFT 做 1:4 與 1:8 之壓縮與還原	276
圖 40	一維測試訊號以 DWT 做 1:4 與 1:8 之壓縮與還原	277
圖 41	Tiffany at $V_8(x, y)$	288
圖 42	$V_8(x) \times (V_7(y) \oplus W_7(y))$ 和 $(V_7(x) \oplus W_7(x)) \times V_8(y)$	289
圖 43	Tiffany at $V_7(x, y) \oplus W_7(x, y)$	290
圖 44	split 程式分解矩陣之圖示	292
圖 45	Tiffany 經過兩次和最多次的轉換結果	294
圖 46	Tiffany at $V_7(x, y)$ 、 $V_6(x, y)$ 、 $V_5(x, y)$ 、 $V_4(x, y)$	295
圖 47	Tiffany 經過 1:6 和 1:10 模擬壓縮後的合成影像	296
圖 48	Tiffany 經過 1:30 和 1:100 模擬壓縮後的合成影像	297

圖 49	CZO 型式的測試圖像	300
圖 50	CZO 測試矩陣經 $p = 2$ 和 $p = 4$ 凌波轉換	302
圖 51	CZO 測試矩陣經 $p = 6$ 和 $p = 8$ 凌波轉換	303
圖 52	分層轉換與全轉換的圖示	304
圖 53	CZO 測試矩陣經 $p = 2$ 和 $p = 6$ 凌波做全轉換	305
圖 54	週期化凌波轉換的邊框效應	306
圖 55	Tiffany 影像和 CZO 矩陣經過區間內之凌波轉換	307
圖 56	$\frac{4}{9}x(3-x)$ 在 $[0, 3]$ 以 $\frac{1}{64}$ 為間隔的折線圖	322
圖 57	$\frac{4}{9}x(3-x)$ 在 V_6 上做投影後的折線圖	323
圖 58	$\sum f(\frac{k}{64})\phi(64x-k)$ 以 $\frac{1}{64}$ 為間隔的折線圖	324
圖 59	$f(x) = x(1-x)$ 和 $\tilde{f}_4(x)$ 、 $\tilde{f}_5(x)$	326
圖 60	一個對稱正定 2×2 矩陣的特徵向量圖示	331
圖 61	Daubechies $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ $p = 2$	338
圖 62	Daubechies $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ $p = 3$	339
圖 63	Daubechies $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ $p = 4$	340
圖 64	$p = 3$ 的 $\phi(x)$ 在 $x = 1$ 附近的局部函數圖形	341
圖 65	$p = 1, 2, 3, 4$ 的 Daubechies $\phi(x)$ 與對應的 $\psi(x-p+1)$	342
圖 66	$p = 5, 6, 7, 8$ 的 Daubechies $\phi(x)$ 與對應的 $\psi(x-p+1)$	343
圖 67	$p = 9, 10, 11, 12$ 的 Daubechies $\phi(x)$ 與對應的 $\psi(x-p+1)$	344
圖 68	$p = 3$ 的 $\phi'(x)$	346
圖 69	$p = 6$ 的 $\phi'(x)$	346
圖 70	$p = 2$ 的 $\phi^{(1)}(x) \cdots \phi^{(6)}(x)$ 階梯函數逼近	349
圖 71	$p = 2$ 的 $\phi^{(1)}(x) \cdots \phi^{(6)}(x)$ 折線函數逼近	352

重要程式目錄

dwt()	離散凌波轉換的控制程式	247-250
dwt1d()	一維離散凌波轉換	251-258
dwt2d()	二維離散凌波轉換	283-286
Code-2	reflect() 鏡射成 $2^j \times 2^l$ 矩陣	250
Code-4	dwt1d 的分解執行過程	254
Code-5	pwd() 執行分解過程之週期化	254
Code-6	wf() 真正執行 DWT 的計算步驟	255
Code-8	dwt1d 的分解執行過程	258
Code-9	interlace() 將兩矩陣之列向量交叉重組	258
Code-10	pwc() 執行合成過程之週期化	259
Code-11	dwt2d 的分解執行過程	285
Code-12	dwt2d 的合成執行過程	286
Code-13	split() 將一個矩陣拆成三個子矩陣	291
Code-14	saturate() 飽和性切除	293
Code-15	用離散疊積畫 V_j 中的函數圖形	316
Code-17	用區間組合畫 V_j 中的函數圖形	318
Code-18	以特徵向量計算 $\phi(x)$ 的整數點值	333
Code-19	階梯函數迭代法畫 $\phi(x)$ 圖形	350
Code-20	折線函數迭代法畫 $\phi(x)$ 圖形	351
Code-21	row2mat() 向量轉成矩陣	401

重要數學式目錄

凌波係數消散定理	182
海森堡測不準定理	213
Haar 凌波係數消散定理	40
席瓦茲不等式	92
L^1 傅立葉轉換定理	139
L^2 傅立葉轉換定理 (Plancherel 定理、Parseval 等式)	142
勒貝格收斂定理	116
Villemoes 充分條件	226
Lawton 充分條件	166
單農取樣定理	152
Paley-Wiener 定理	147
微分均值定理	77
中間值定理	165
性質 2.1 席瓦茲不等式之積分形式	88
性質 2.2 垂直投影是最短距離	93
性質 2.3 樣條函數的基本性質	149
性質 2.4 基本樣條函數的遞迴性質	149
性質 3.1 基本樣條函數之自格等式	158, (證明) 223
性質 3.2 自格係數之奇數項和為 1	162
性質 3.3 凌波投影係數與 Hölder 指數的關係	181
性質 3.4 正則自格函數之充要條件	224
性質 3.5 正則自格函數之特徵函數性質	225

性質 3.6	自格函數可組成多項式	233
性質 5.1	$\sum \tau(k)\phi(x-k) = x^m$	360
性質 5.2	$M_2 = (M_1)^2$	360
性質 5.3	Strang 矩陣的長度 $\leq \sqrt{2}$	366
性質 5.4	積分形成新的自格函數	370
性質 5.5	Lawton 矩陣的長度 $\leq \sqrt{2}$	376
性質 5.6	凌波函數之導函數內積	387
性質 5.7	導函數之傅立葉轉換	388
性質 5.8	正交凌波函數的質量中心在中點	389

(1.8)	8	(2.17)	104
(1.16)	17	(2.18)	105
(1.20)	21	(2.21)	113
(1.27)	27	(2.22)	120
(1.34)	32	(2.23)	120
(1.37)	35	(2.24)	123
(1.39)	39	(2.28)	126
(1.41)	40	(2.30)	128
(1.44)	42	(2.32)	132
(1.49)	49	(2.33)	134
(1.50)	50	(2.34)	135
(1.53)	51	(2.36)	136
(1.58)	53	(2.43)	142
(1.60)	53	(2.44)	143
(1.63)	58	(2.47)	145
(2.11)	95	(2.49)	146

2.9 勒貝格積分

非數學背景的讀者，或許納悶：積分就是求函數曲線下的面積嘛，為什麼數學家要分黎曼 (Riemann) 積分還是勒貝格 (Lebesgue) 積分？難道在不同的定義之下，積分有不同的意義？會算出來不同的數字？不是的。不論我們採用什麼積分的定義，它的直覺意義仍然是求函數曲線下的面積。如果根據兩個定義去算某函數曲線下的面積，都算得出結果，那兩個結果必定相等。

問題是，有些函數，它所謂的函數曲線極端不合常理，那時候，可能根據黎曼的積分定義，卻算不出曲線下的面積，因此我們說它不存在。而我們的直覺卻說，那曲線下的面積必定是有限的，怎麼能不存在呢？積分定義的聖杯，應該要為每一個直覺上含括有限面積的區域決定一個數字。當然，這個數字還要符合我們對面積的直覺感受。

我們首先要看一個黎曼積分失敗的例子。

令 $Q = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ 是 $[0, 1]$ 之中所有有理數的集合。我們將 Q 的元素編號成為*

$$Q = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

定義一個函數數列

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 0 \\ g_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x = r_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

* 我們實在不能再進入細節了。請讀者接受這個事實：有理數可以一個一個地編號，但是實數不行。意思是說，如果一個一個將有理數編號，當號碼 $\rightarrow \infty$ 的時候終究會編完。但是無論用什麼方法去將實數編號，即使號碼 $\rightarrow \infty$ 也編不完。這通常是集合論的課題。

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{r_1, r_2\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

...

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

很明顯地 $g_n(x) \in L^2([0, 1])$ 而且 $g_1(x) \leq g_2(x) \leq g_3(x) \leq \dots \leq 1$ 。所以這是個漸增有上界的函數數列。而 $g_n(x)$ 的極限函數顯然是

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathcal{Q} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.21) \quad \text{eq:NR}$$

我們不能畫出 $g(x)$ 的函數圖形，只能憑想像了。黎曼的積分定義，將無法決定 $\int_0^1 g(x) dx$ 的值。

爲了觀察黎曼積分爲何失敗，我們只好很快地複習黎曼積分的定義。我們只考慮 $f(x)$ 定義在 $[a, b]$ 上的情形。對每個正整數 n ，令 $\Pi_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 其中 idx:Rieman

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

則 Π_n 稱爲 $[a, b]$ 的一個 n 段 (未必是均勻的) 分割。顯然對每個 n 有無窮多種 n 段分割的方法。定義

$$|\Pi_n| = \max_k \{x_k - x_{k-1}\}$$

Π_n ， $n = 1, 2, \dots$ 稱爲一個分割系列。顯然 $[a, b]$ 存在無窮多種分割系列。如果 $\lim |\Pi_n| = 0$ ，我們稱 Π_n 爲一個次均勻分割系列。對應 Π_n 的每一段分割 $X_k = [x_{k-1}, x_k]$ ，定義 Y_k 是 $f(X_k)$ 的值域。由於 $f(x)$ 未必是連續函數，所以 Y_k 未必是一個區間。在每個 Y_k 裡面任選一個數 η_k ，定義

$$R_n = \sum_{k=1}^n \eta_k |X_k| \in \mathbb{R}$$

其中 $|X_k|$ 就是 X_k 的長度 $x_k - x_{k-1}$ 。顯然一般來說對每個 X_k 有無窮多種選擇 η_k 的方法。如果對每一種可能的次均勻分割系列 Π_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, 和 Π_n 裡面每一個 η_k 的可能選擇, 所造成的所有數列 R_n 都收斂, 而且收斂到同一個數 A , 則稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內 (黎曼) 可積, 其積分值為 A 。記做

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

現在, 對於 (2.21) 中的 $g(x)$, 我們只要選一個系列的 Π_n 就夠看出來不可積了。令 Π_n 是 $[0, 1]$ 的 n 段均勻分割。亦即 $|X_k| = \frac{b-a}{n}$ 。因為每個 X_k 裡面必定有有理數也有無理數, 所以 $Y_k = \{0, 1\}$ 。當 n 是偶數的時候, 我們在每個 Y_k 裡面選 $\eta_k = 0$, 所以 $R_n = 0$ 。當 n 是奇數的時候, 我們在每個 Y_k 裡面選 $\eta_k = 1$, 所以 $R_n = \sum |X_k| = 1$ 。對應這一套選法, 得到的 R_n 數列是

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

顯然這個數列不收斂。

根據黎曼的積分定義, 因為無法決定 $\int_0^1 g(x) dx$ 的值, 所以說它的積分不存在。但是, 直覺上, 整個 $g(x) \leq 1$, 所以 $g(x)$ 和 x -軸在 $[0, 1]$ 內圍成的區域全部落在正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 裡面。整個正方形的面積是 1, 所以 $g(x)$ 所圍的面積最大也不過是 1, 怎麼能說它的面積不存在呢?

接著, 我們介紹勒貝格的想法。參照圖 14, 黎曼積分的想法, 基本上是在 x -軸上做切割; 而勒貝格積分的想法, 基本上是在 y -軸上做切割。令 $f: [a, b] \rightarrow Y$ 其中 $Y \subset \mathbb{R}$ 是 $f(x)$ 的值域。因為 $f(x)$ 未必是連續函數所以 Y 未必是一個區間; 例如 $g(x)$ 的值域只有兩個點

idx:Lebeg

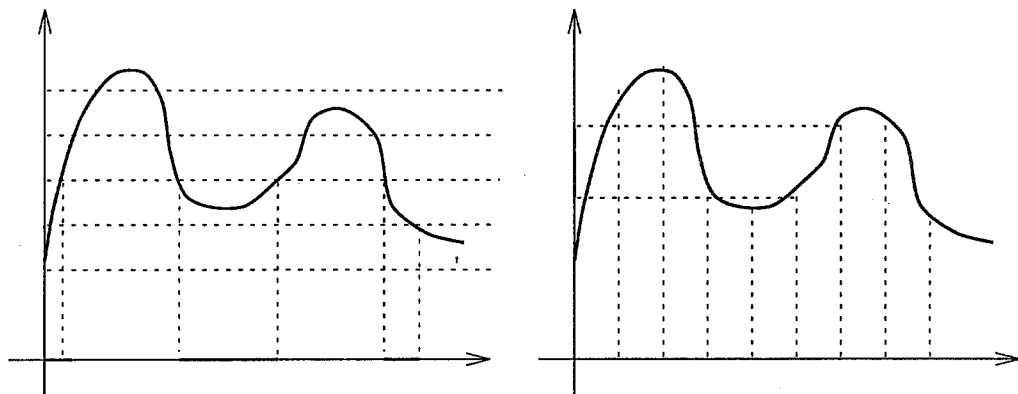


fig:Lebeg 圖 14 勒貝格積分 (L) 與黎曼 (R) 積分圖示

$\{0, 1\}$ 。我們只考慮 $Y \subset [c, d]$ 的情形。在 $[c, d]$ 上面取 n 段分割 $\Pi_n = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ 其中

$$c = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n = d$$

對應 Π_n 的每一段分割 $Y_k = [\eta_{k-1}, \eta_k]$ 定義 X_k 是 Y_k 的反值域，亦即

$$X_k = f^{-1}(Y_k) = \{x \in [a, b] \mid f(x) \in Y_k\}$$

因為 $f(x)$ 未必是連續函數，所以 X_k 有可能是空集合。例如若 $Y_k = [\frac{3}{4}, \frac{5}{6}]$ ，則 $g^{-1}(Y_k) = \emptyset$ 。依照直覺定義 $|\emptyset| = 0$ 。令

$$E_n = \sum_{k=1}^n \eta_k |X_k|$$

如果對每一種可能的次均勻分割系列 Π_n ， $n = 1, 2, 3, \dots$ ，所造成的每一個數列 E_n 都收斂，而且收斂到同一個數 A ，則稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內 (勒貝格) 可積，其積分值為 A 。記做

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

根據這個定義，我們可以推得

$$\int_0^1 g(x) dx = |Q|$$

現在，大傻推二傻，新的問題是： Q 的長度是多少？所以我們看到，勒貝格積分理論的關鍵，乃是在於一個實數子集合的長度如何定義。像 $[a, b]$ 這樣的子集合，長度顯然應該是 $b - a$ 。但是像 Q 這樣的集合呢？這一套理論稱為測度論 (measure theory)，而剛才所謂的長度，正確的術語是測度。若 $X \subset \mathbb{R}$ ， X 的測度記做 $m(X)$ 。 $m(\emptyset) = 0$ ，如果 X 只有有限多個點則亦 $m(X) = 0$ 。如果 X 是有限多個區間的聯集，則 $m(X)$ 就是這些區間長度的和。但是測度論可以處理更奇異的實數子集合，例如 $m(Q)$ 。測度論是實變函數論和機率論的基礎，屬於數學系高年級或研究所的課程。我們不能再深入細節了。

使得勒貝格的積分理論，比黎曼的積分理論更為成功的關鍵，就在於下面這個定理。

勒貝格收斂定理 若 $f_n(x)$ 與 $f(x)$ 都是在 $[a, b]$ 上的可積函數。如果 $|f_n(x)| \leq f(x)$ 而且 $f_n(x)$ 逐點收斂，則極限函數亦可積，並且

$$\int_a^b \lim_n f_n(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx$$

此處所說的可積都是指勒貝格可積。

因為我們沒有深入太多細節，所以上面定理的敘述比一般實變課本上的粗糙一點。但是這個定理的重點已經呈現。它的意思是說，如果有一個正值的函數 $f(x)$ ，它所圍的面積有限，而 $|f_n(x)| \leq f(x)$ 表示 $f_n(x)$ 被圍在 $\pm f(x)$ 之間，這塊區域的面積還是有限。那麼如果 $f_n(x)$ 收斂，其極限函數還是被圍在 $\pm f(x)$ 之間。在直覺上它應該是可積的，

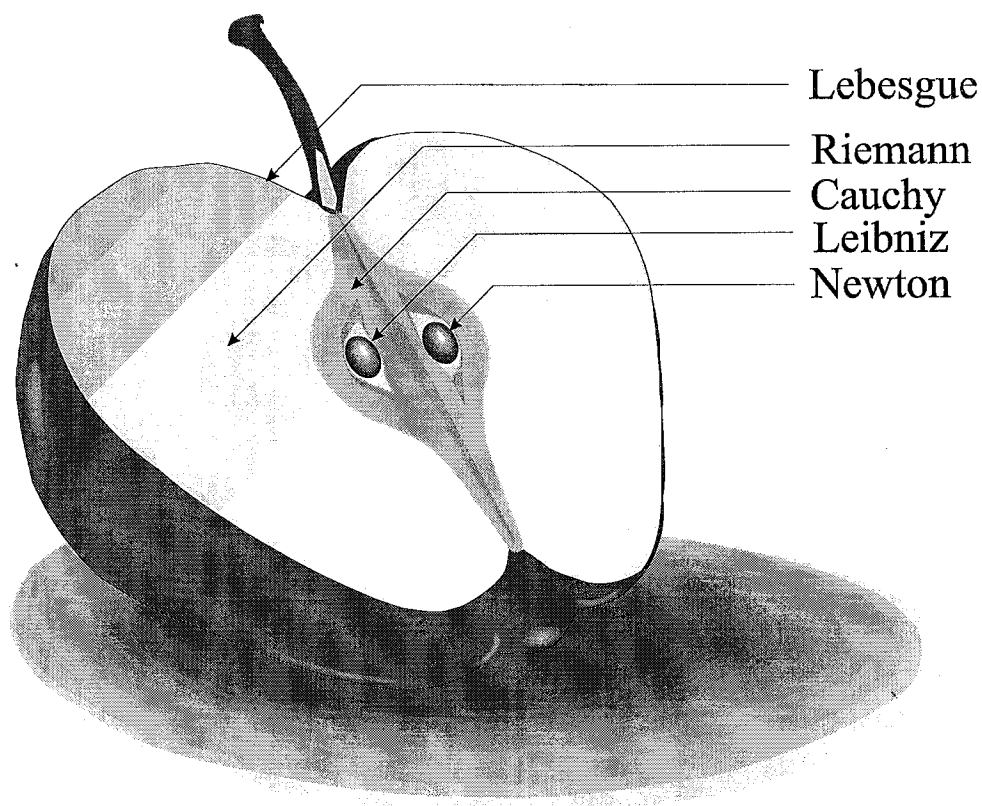


fig:apple 圖 15 積分理論發展之示意圖

而勒貝格理論也說它的確是可積的。這個定理說得更多的是，在此定理的假設條件下，極限與積分的步驟可以交換。

我們不能在此證明勒貝格收斂定理，也不能認真證明，在勒貝格積分的意義之下，所有 L^2 中的柯西數列必定收斂（在 L^2 的意義下收斂）。我們在此驟下結論：如果 L^2 空間中的內積與長度之積分都是勒貝格積分，則 L^2 空間是一個完備的向量空間，亦即 L^2 是希爾伯特空間。

提到微積分，就一定有牛頓。提到牛頓，少不了聯想到蘋果。如果我們將所有“應該”可積的函數，視為一個蘋果。那麼回顧積分學的發展史，在牛頓與萊布尼茲的時代，找得到反導函數的函數在有限區間內是可積的。這些可積函數相當於蘋果的種子。柯西的積分理論，使得所有閉區間內的連續函數都可積，即使找不到反導函數也行。例如 $\int_0^1 \sqrt{x^3+1} dx$ 。柯西理論的可積函數相當於蘋果的果核，它包含了種子。黎曼的積分理論，使得所有閉區間中的分片連續函數都可積，也可以討論在有限區間內發散的函數積分，例如 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ，還可以討論無限區間內的積分，例如 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ 。黎曼理論的可積函數相當於蘋果的果肉，它包含了果核和種子。至此，大約 1860 年代，我們有了絕大部分的可積函數，就缺一層皮。勒貝格的積分理論，就包上了那層皮，它使得整個可積函數是完備的。

凡是黎曼可積，都是勒貝格可積，而且兩者的積分值相同。黎曼可積，卻找不到反導函數的函數，可以用數值積分來估計（通常是數值分析的課題，我們在第五章五節中稍有介紹）。而黎曼不可積，但勒貝格可積的函數呢？它就長得像 (2.21) 中的 $g(x)$ 。它應該不會出現在一般人的“例行工作”中。

您或許要問，數學家花了那麼大把勁，只爲了那一層皮嗎？嗯……如果沒有那層皮，蘋果就不完整了。數學家的審美眼光受不了這種不完整。我們如果不能瞭解他們，至少應該諒解他們必須這麼做。而且，比較有建設性的講法是，數學家花了那麼大把勁，才使得 L^2 中的任何柯西數列（或漸增有上界數列）必定有極限。

從現在開始，當我們說到積分的時候，都假設是根據勒貝格定義的積分。

習題 2.29 根據勒貝格積分的定義，證明 $\int_0^1 g(x) dx = m(Q)$ 。其中