

國科會數學教育學門課綱研究 SIG 諮詢會議記錄

從課程理論談數學課綱

周淑卿 · 2023 年 4 月 24 日

吳正新、吳昭容、林勇吉、林原宏、陳維民、單維彰、鄭章華與會

黃芯淇初稿 2023-04-30 · 單維彰一修 05-04

周淑卿定稿 2023-05-23 · 補進引用與授權 05-28

中央大學 112. 4. 24

從課程理論談數學課綱

周淑卿

國立臺北教育大學
課程與教學傳播科技研究所

各位老師午安。單老師邀我來，用課程理論的角度跟大家談一談我對數學課綱的一些看法。這讓我有點惶恐，因為我是一個數學不太好的人。可是後來想想，應該由數學不太好的人來談「怎樣讓我們學生把數學學得更好」。

有時候我自己也在想，為什麼我從國中開始數學就不好？正確的說，應該我是從小學開始，數學能力就不好了。但是，因為我的數學成績還不錯，所以讓我誤以為我的數學能力還不錯。後來自己就慢慢了解：數學成績跟數學能力是兩件不相當的事。以前我的老師很有辦法，把我們教得很會考試，這就是所謂的「應試教育」，我們的「應試能力」蠻強的，所以可以在很多考試中過關斬將，但是再往上就不行了。還記得我最後一次考完數學的時候，覺得天下太平了，我的好日子終於來了，以後再也不要看到數學。

如今也看到很多孩子常常表達一個類似的概念，就是感覺數學像是一個「坑」，只要一碰到就會掉下去。很多人在高風險考試上，就卡在數學這一科，因為數學成績不佳，於是無法有更多選擇。

最近幾年我剛好有幾位擔任數學老師的博士班研究生，在跟他們一起探討數學教育的過程中，讓我越來越關心數學教育。我們探討的範圍在國中小，高中的數學對我來說太難了，所以今天的分享主要聚焦在國中小階段。

課程設計要處理什麼？

- Ralph W. Tyler 提出有關課程設計的四個基本問題, 轉化為課程設計的四大重點：
 - 確立目標
 - 選擇學習經驗
 - 組織學習經驗
 - 評鑑課程
- 即使Tyler 理論受到諸多批評, 至今課程設計仍不脫離以上的重點

從課程理論的角度可以看到些什麼？我就自己的理解，跟大家再談一些我對數學領綱的看法。

泰勒的課程理論談的是非常基本的課程設計原則，我們大概也知道這麼一回事。可是，課程設計這件事情就是「知易行難」，它的原則簡單得不得了，但是當你要用這些原則來思考實際的問題時，好像又複雜得不得了。

泰勒提出來四個基本問題，其實到現在所有課程設計都還是在處理這四件事。在領綱上，首先處理的是目標，因為設定目標是領綱最大的功能。其次是我們想要給學生什麼學習經驗？這就涉及學習內容和學習表現。再者，如何把我們期望的數學學習內容，用合乎某種邏輯的方式組織起來？但是究竟要符合什麼邏輯，就有很大的討論空間：是按照數學學科知識難易度的邏輯？還是按照學生學習難易度的邏輯？以前我們可能會認為這兩件事情是一樣的，學科知識的難易就等於學生學習的難易；可是從現代心理學的研究來看，這兩件事情可能不完全相等。但是我們仍然比較習慣按照學科知識的難易度、複雜度來安排學習內容，而且所謂「難易／複雜程度」是由某些人來界定。到底什麼叫做由單純到複雜，由簡單到困難，應該由誰來界定？這也有很多討論空間。

領綱至少要處理前三件事情，而課程評鑑是另外的事情。

現在，泰勒理論被很多人批評，說它已經過時了，沒辦法因應現在「後現代社會」的需求。但其實到現在為止，舉凡我們談課程設計，大體上都不脫離泰勒當初提出的四件事。

泰勒說，當我們要設計課程的時候，應該先問自己，到底想要你的學生學會什麼？光是要「學會什麼」這件事情，就足夠領綱吵好幾年。當然這個問題有很多不同角度的思考。

課程設計的起點：學生為何而學？

- 課程目標：學校應追求什麼教育目標？
- 學生為什麼要學會某些知能？
- 社會期待學生擁有什麼能力或態度？



所有課程設計的起點，一定都是問這件事：學生為什麼要學？他／她為何而學？數學、語文的學習，其實都一樣要問：到底為什麼我要學這些東西？所以在所有課程目標的思考上，都是問學校到底應該追求什麼目標？我們要讓孩子學數學、希望他們學數學，為什麼他學這些？先從問「為什麼」開始。為什麼他要學會某些知識呢？我們這個社會期待學生有什麼能力跟態度？如果我們要學數學，學會了以後，希望她／他有什麼？為什麼就非得學這些呢？這個當然是大哉問。

泰勒原先的說法是，儘管我們有很多東西可以教給學生，廣泛來說，沒有任何一件事情是沒有價值的，每件事情似乎都是好的，但是這些我們認為好的事情，不見得都可以成為課程的內容，也不見得能夠達到我們想要的目標。於是他建議，所有做課程設計的人，應該都要想這三件事：當我們思考課程目標的時候，應該先問我們對學生了解多少？學生到底是什麼樣的狀態？包括他們的認知發展、學習經驗、生活經驗，以及他們生活當中面對的是什麼問題？當代的社會生活是怎麼回事？為什麼當代的社會生活要我們學這些東西呢？

這三大來源，大體上會是我們思考課程目標最重要的三個來源。當然這中間會有過濾網；假如有這麼多好東西，它們都有價值，但我們又不可能把所有的內容放進來的時候，就會進入我們的教育哲學、學習心理學去過濾，去篩選哪些內容可以成為某一個階段的學生最應該在這個時候學習的，學了以後能夠達到什麼期望？我們當然可以再問，到底怎麼思考「期望」？

向學科專家尋求建議-1

- 學科專家提出的課程目標常被批評太專門化 (specialized)
 - 為了數學相關科系做準備
 - 為了日後從事與數學有關的工作
- 課程設計者應當詢問學科專家的問題：
 - 對於那些不打算從事數學相關工作的人而言, 數學可以對這些學生有什麼貢獻？

還有一個來源就是學科專家的建議。如果我們想要學數學，學科專家會建議學習什麼呢？有很長一段時間，從課程標準的時代一直到現在—可以說到現在嗎？我覺得是。不只是數學，包括歷史、地理、公民與自然科學的每一科課程，其實都被批評太專門化，好像所有的學生未來都要當科學家、歷史學家、數學家似的，安排給學生的課程，都好像他們未來要從事和這個學科相關的工作。好像我們認為學生未來可能會念跟數學有關的科學、工程、統計專業...等工作，所以在設計數學課程時，各方面的數學知識都被認為很重要。

學科專家提出來的課程目標被批評太專門化，到現在 12 年國教課程，數學教育界很多學者都在談數學素養，也開始認為數學課程不應該是為數學專家而預備的。然而，如今很多老師的困擾仍然是：「數學領綱裡的內容是洋洋灑灑這麼多，到底我們有多少時間可以把孩子全部教會？」

泰勒當時也提出一個很重要的觀念，他說，課程設計者常常詢問學科專家，請問這個學科有什麼東西可以教給學生？那就不得了了，每個學科都有很多東西可以教。泰勒認為：我們問錯問題了；如果我們要從學科專家獲得最好的建議，應該問：「對於那些不打算從事數學相關工作的人，數學可以對這些學生有什麼貢獻？」那其實這個就是現在講的數學素養。

這些「不打算從事數學相關工作」的人，只是一般的公民，未來可能不會做數學專業的事。當然，未來如何沒人知道，她／他也可能會做數學相關工作，到了高中以後就要分流，分流以後，某些學生就會需要數學專門知識。現在談數學素養，正好讓數學專家和教育專家一起來思考：到底數學對一般學生有什麼貢獻？我們希望他們作為一般公民，可以從數學得到什麼養分？

向學科專家尋求建議-2

- 數學對一般公民而言, 學習效益為何?
 - 20世紀前的官能訓練說 (theory of faculty training)--某些心理官能經過訓練後, 可以自動遷移到任何領域.
 - 數學被視為具有formal discipline 價值的學科
 - 當代competence-based education 觀點
 - 系統思考 溝通表達 公民意識 媒體素養 美感素養

剛才說的就是這個問題：對於一般的公民來說，數學的學習效益到底是什麼？關於這些事情，有兩個很典型的說法。我覺得很有意思。

二十世紀之前有一個心理學上大家大概都不陌生的 **Theory of Faculty Training**，官能訓練。它的意思是，人的心智、人的腦力就好像肌肉一樣鍛鍊。經常練習心智官能，就好像去健身房做一些跑步、划船、舉重的機械性動作，反覆練習來鍛鍊我們的肌耐力、心肺功能。類比到我們的心智能力上，也是一樣的道理--某一些心理官能經過反覆訓練以後，可以遷移到任何領域。所以，如果我們想要孩子的思考有邏輯，我們就拿一些邏輯的問題讓他練習，這樣，他的邏輯能力就會好；當他邏輯能力好，任何有關邏輯的事情他都可以解決。這可能是二十世紀之前的觀念，這個想法到現在已經不太被認可了。不過，它是不是真的消失了呢？我覺得這個觀念也不見得在教育界裡消失。至少，很多學校老師仍然相信。

有人仍然認為，練習做些題目，就算沒有樂趣也沒關係，學習不是本來就要忍受無聊和辛苦嗎？讓他反覆做些練習，自然就可以學會某種「思考能力」（但這裡所說的思考能力需要再界定）。反正他學會之後，自然就可以遷移到其他領域。其實蠻多學校老師是這樣想的；因為這樣的想法，所以就反覆訓練學生，好讓他們熟練某件事情。比如說，很多小學老師喜歡一直叫學生練習計算，甚至將數學等同算術。就官能訓練說的觀念而言，數學成為非常典型的「形式訓練 (formal discipline)」科目。跟他一樣「有效」的科目還有拉丁文。儘管拉丁文是現在社會已經不使用的語言—當然，有少數人需要它去讀古代典籍—至少對大部分人來說，這個語言已經不實用。那為什麼要還要訓練學生去學呢？因為學習這些字彙與文法，可以鍛鍊語法能力，學會之後可以遷移到其他語言的學習，也會增強記憶力。這就是所謂「官能訓練」。過去，數學也一直被認為是訓練心智能力很有效的科目；很多數學老師認為：儘管不知道學了數學原理可以應用在什麼地方，學生也學得很辛苦，但對他／她仍有價值，道理

就在此。

當代的 **competence-based education** 是另外一個想法。我們現在已經不談「形式訓練說」了，而是討論：對於一般的公民來說，學習數學可以讓你形成某種素養；這種素養，不單只是在數學解題本身，也可能會有像以下所說的系統思考、溝通表達、公民素養、媒體素養、美感素養，這些 **competencies** 都有可能經由數學的學習而形成。但是，為什麼數學的學習能讓學生發展這些素養？我覺得領綱並沒有對此提出很好的答案。我不知道各位老師讀了領綱之後，有沒有在領綱看到這個問題的答案？我們待會可以一起來談一談這個問題。

對學生的研究

- 學生的需求為何？--需求評估
 - 興趣, 或因應某些問題而產生需要
 - 教師認為學生應該會, 而校外生活未能提供機會
- 什麼是「學生應該會」的常模 (norm) ? (課綱有此依據否 ?)
 - 歷代課綱為此時有爭執

第二個來源是對學生的研究。我們現在常說「以學生為主體」，所以對於學生學習的研究下了很多功夫。在我們思考課程目標的時候，本來就會問學生的需求是什麼？也就是要做需求評估。第一種需求是主觀的需求，首先當然是學生有興趣。但是我們要让學生主動有興趣，很難，因為一般學生對學習通常是沒有興趣的，可能早期就打壞了胃口。所以當我們要让學生有興趣，老師要花很大的力氣。其次，是因為現在就要處理某些問題而產生的需求；如果是這樣的需求，就要看不同階段的學生到底需要用數學去因應哪些問題。第二種是客觀的需求，這個需求是老師或者大人—領綱委員—認為學生應該要會，但是學生在平常的校外生活沒有機會學習的東西；假如我們在一般校外生活就能學會，這件事情學校就不需要花時間去教。問題就在於學生「應該會」這件事：什麼叫做學生應該會？那個 **norm** 是一件非常值得去談的事。

我們課綱有沒有提出這個東西？當然，從課程標準時代就會列出教材大綱，提列每個年級的學生，應該要學的數學內容。到了九年一貫課程，叫作能力指標，十二年課綱則是列出四階段的學習內容和學習表現。課綱所訂定的就是「學生應該要會的」，我們要依據這個課綱所訂出來的學習重點來發展教材、

評量測驗。如果學生沒有達到課綱要求的標準，學校還要做很多補救教學。

但是，**課綱是依據什麼而來？**這也是我的疑惑。我們寫在課綱裡面的，說每一個領域/科目，在每個階段孩子應該學會這些，到底根據什麼？國教院試圖要從長期的學生評量結果，建立這個常模。這個常模的確是很重要，我們需要這個東西，課綱才会有依據。不然的話，每一次課綱修訂時，委員來了之後，就要陷入一個長時間的討論，究竟什麼才合適的學習內容與表現？

課綱有沒有什麼依據？其實，我們歷代的課綱，為了這件事情都常常有爭執。所以，可能會有一段時間認為學生學的太難了，後來又認為學的太簡單了。還有，就是跟對岸、日本、香港比較，看人家幾年級已經學到什麼，我們怎麼可以學得比人家少？這就是訂課綱的時候經常會有的為難跟爭執。也就是說，我們對於學生在每一個科目上的學習表現的常模，還不是那麼清楚。

對當代社會生活的研究

- 當學習情境與生活情境具有相似性時，較有可能產生學習遷移
- 當代的社會生活中，學生何時、何事需要數學？
 - 實用性
 - 跨域應用
- 未來的AI 時代呢？--下一波課綱的課題

第三個主要來源是對於當代社會生活的研究。我們都瞭解：當學習情境跟生活情境有比較高的相似性時，就比較可能產生學習遷移。那麼，我們就要問：在當代的社會生活中，學生是什麼時候在什麼事情上需要數學？放在一個參與社會的公民生活環境裡，我們什麼時候必須用到數學來思考問題，來參與一些議題討論，或是解決自己的問題？是我投資的時候嗎？是我在公民投票的時候嗎？還是什麼時候會需要這些數學的概念和方法來幫助我？可能我們想的是「實用性」，不過這個實用性會從國中到高中變得越來越不那麼立即實用。什麼時機、什麼工作領域需要數學？這些問題需要很多專家一起來討論。這幾個問題都在問：到底我們該讓孩子學什麼數學內容？

前幾天參與的研討會就在談：AI 時代來臨，那麼學校到底應該讓孩子學什麼，才是 AI 時代他們應該要學習的？這個就是下一波課綱的課題了。現在正在談 118 課綱，而最近從 3 月份 chat GPT 上市以來，大家就非常熱烈討論這件事。當然我們就首先會想到：「九九乘法還要背嗎？」反正機器人很快就會運算。可是不要背嗎？就算現在電算機很快，但是學生的基本計算能力都不要嗎？這樣說的話，

學生什麼都不要學了，因為所有的事情機器人都會了。所以似乎也不能這樣的思考。下一波課綱會面對這個課題，會有更嚴峻的挑戰跟討論。

我覺得這個問題也蠻有趣的。的確機器人可以回答我們好多問題，包含我們老師的教案設計。很多人說，老師還設計什麼教案，給 AI 輸入幾個條件，機器人都幫忙設計好了。例如，我上次就給它幾個條件，我說有一個學校，要設計環境永續的課程，以潔淨的水資源為主題，20 週，國中七年級的學生，並且把核心概念列給它，問：課程目標應該是什麼？我應該有哪幾個核心問題讓學生來探討？我覺得機器人回答得蠻不錯的。這樣一來，我們老師以後還要做教案設計嗎？如果老師不學習設計課程，怎麼判斷機器人所說的是好的還是不好的？AI 對當代社會生活帶來巨大變化，將會對下一波課綱的思考造成很大挑戰。

數學+素養

- 數學素養是指非數學專業人士（不是數學家、數學教授、數學教師）平常所能表現出來的數學知識、技能、品味（單維彰, <https://shann.idv.tw/edu/literacy.html>）
- 經由數學的學習而形成的核心素養, 如領綱所列, 是否即是數學素養？
- 共識：讓學生學數學時感到有意義—有感覺、有感受

我們剛剛談到的事情，就是數學跟素養。我看到單老師談的數學素養，蠻認同的。他說：數學素養是一個非數學專業人士，平常能夠表現出來的數學知識、技能跟品味。而這又是什麼呢？經由數學學習形成核心素養，是不是就是單老師所講的數學素養？我知道很多研究者好像對於這兩件事情有不太一樣的看法。我不再細說大家的看法如何，簡單說：一個叫做數學素養，一個就像九大核心素養所談的 **competence**，這兩件事也是不一樣的。感覺很像，真的有什麼很大的差別嗎？如果它們不一樣，是哪裡不一樣？

我看到的一個共識是：我們都希望數學課程不是太過專門化、專業的數學內容，而是讓一般的學生學會了以後，可以用來思考、判斷、參與社會生活以及處理個人某些生活上所需的知識、技能、品味。讓學生學數學是「有意義」的，知道這些是我需要學習的東西，學了之後感覺我是喜歡的，或者是我能夠欣賞這裡面的奧妙，覺得這個東西是蠻有意思的，而且我還能夠用它來思考某些事情、處理某些問題。

讓學生「有感」：覺得這數學有意義，似乎就是很多數學教育的夥伴們在談

的數學素養，或是透過數學學習而形成的核心素養。不過現在的領綱是不是給我們很好的答案？我自己看數學領綱，不太明白領綱解釋的數學核心素養，也不明白這些和後面的學習內容與學習表現有什麼關係？

領綱對教學目標的想法 連繫到素養嗎？

學習重點的呈現，分國民小學、國民中學、普通型高級中等學校必修課程（11 年級分 A、B 兩類）、...等類編寫，係依據下述五個學習階段的教學目標發展而成。

第二學習階段（國民小學 3-4 年級）：在數方面，能確實掌握自然數的四則與混合運算，培養流暢的數字感，並初步學習分數與小數的概念。在量方面，以長度為基礎，學習量的常用單位及其計算。在幾何方面，發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。

第四學習階段（國民中學 7-9 年級）：在數方面，能認識負數與根式的概念與計算，並理解坐標表示的意義。在代數方面，要熟悉代數式的運算、解方程式及簡單的函數。在平面幾何方面，各年級分別學習直觀幾何（直觀、辨識與描述）、測量幾何、推理幾何；空間幾何略晚學習。能理解統計與機率的意義，並認識基本的統計方法。

我們來看數學領綱對教學目標的想法，有沒有聯繫到素養？從這段領綱內容來看：各級學校的數學課程，係依據下述五個學習階段的教學目標發展而成。當我們把這些數學的學科要素理解成教學目標的時候，跟前面講的數學素養，好像關係又不是那麼的密切了。因為這些所謂「教學目標」，就是把數學知識羅列在不同的學習階段裡，告訴老師們：「每一個學習階段，你應該要掌握的是哪些數學概念、方法。」所以，教學目標其實還是著眼於數學本身的知識內涵，而不是學生可以透過數學獲得什麼相關能力。

學習表現反映數學素養？

編碼	學習表現（依表現類別排序）
n-II-10	理解時間的加減運算，並應用於日常的時間加減問題。
n-III-1	理解數的十進位的位值結構，並能據以延伸認識更大與更小的數。
n-III-3	認識因數、倍數、質數、最大公因數、最小公倍數的意義、計算與應用。
n-IV-1	理解因數、倍數、質數、最大公因數、最小公倍數的意義及熟練其計算，並能運用到日常生活的情境解決問題。
n-V-4	理解絕對值應用在各種數與量之上的意義，能操作其運算， 欣賞其一致性 ，並能用以描述現象及溝通。
n-V-7	認識弧度量並能操作，理解並 欣賞其作為角之度量的簡潔性 。

接著可以看一下學習表現。我們所看到的學習表現，其實也就是在數學知識前面加上認識、理解、應用這些動詞，那我們剛剛講的數學素養跑到哪裡去了？在學習表現上它就不見了。領綱本來在核心素養講的事情還蠻多的，包含可以在生活上如何去應用這些知識技能、如何欣賞、如何參與公共生活。但是到了學習表現上，我們就會回到一個很單純的形式：在數學知識前面加上一個動詞。可是，有一個特別的地方，就是到了第五學習階段開始出現「欣賞這其中的一致性」、「欣賞簡潔性」。怎麼會忽然到了第五學習階段，跑出有點素養的東西來了？原來是單老師寫進去的。

其實這個跟我們談的數學美感經驗有很大的關係，也就像剛剛談到的：一般人也能夠對數學有品味，例如對於一個解題的過程，或是觀看一個跟數學有關的事情，我們都可以去欣賞這當中存在一些非常奧妙的道理，或是可以很純粹地欣賞它的簡潔性、一致性。的確，數學本身有美感，這件事情一直到我後來陪孩子做數學才感覺到裡面的一致性、簡潔性、以簡馭繁的特性。但我女兒說，那是因為妳不要考試了，所以才覺得有美感；我要考試，所以都不覺得有什麼美感可言。我們的課程綱要，未來有沒有可能在學習表現上，反映出我們原先所期望的在數學素養？

目標引導學習經驗的選擇

四年級：使用量角器測量角度

- 老師給每人一張畫上「10度角」的紙，請學生試著操作量角器。
- 各組討論發表怎樣量才能量出角度。
- 請各組發表，老師引導正確的量角器使用方式。
- 新的佈題與測量練習
- 應用情境：剪出一樣大的三角紙旗，串成一條，用來佈置教室。
- 學校遊戲場有兩個溜滑梯，老師讓學生觀察這兩個滑梯有什麼不同？喜歡玩哪一個？為什麼？
- 學習任務：畫個好玩的溜滑梯設計簡圖，要多長？多陡？同時要考慮安全。
- 老師提供：安全的滑梯和地面的角度不能大於30度→如何畫出設計圖上的角度？
- 量角器的嘗試使用與練習
- 調整設計圖，畫出精確的滑梯角度。

學習目標會引導學習經驗的選擇。我想藉這個例子來談，當課綱裡面的目標就是很純粹的寫該學些什麼數學知識、該學習什麼方法，它所引導出來的學習經驗，跟不是這樣寫的時候，所引導出來的學習經驗會有什麼差異？

這一則學習目標是「使用量角器測量角度」，四年級很典型的一個單元。我在民國 107 年帶老師們討論素養導向教學，那時候有一位老師選擇這個單元，他首先寫的是左邊的教學設計，他想的是：「要教孩子會用量角器量角度，就是數學知識、數學技能嘛。」這位老師給每位學生一張紙，上面畫了 10 度角，然後讓學生試著操作量角器。老師不先跟學生說照著我的方法做，而是讓學生去

嘗試一下，用他以前曾經用直尺來量長度的經驗，試試看學生會怎麼用量角器。然後每一組發表說你們怎麼使用它，可以量出角度？接著，老師再引導量角器的正確使用方式。接下來當然就是又給學生一些不同的角度，讓他們再去練習準確地使用量角器去量出角度來。有趣的是最後的應用情境，當我們看到這應用情境就感到「哇！糟糕了，這個叫做素養的應用情境嗎？」他讓學生利用量角器去試著量出一樣大的三角紙旗，然後把它們剪下來串成一條來佈置教室。我問老師：為什麼剪一樣大的三角紙旗要先用量角器來量？就算三個角都一樣，剪出來的三角旗會一樣大嗎？老師才想說：「哦對，可能不是。」這個所謂的應用情境，反而把學生的概念弄錯了。

老師們常想說：素養不是就說要應用、實踐嗎？所以我就想辦法在最後安置一個可以應用的情境。但以上案例中那個情境是不自然的，硬是要讓學生去用，可是那個情境不但不自然，而且不對。

後來我們跟老師重新討論，如果不要只想著要趕快讓學生去量出角度，能不能回頭來想：為什麼小孩要認識角度？在學生的生活裡面哪裡有角度？沒事為什麼要知道這裡有幾度角？老師想了很久也想不出為什麼。為什麼四年級的小孩，他／她即使知道生活中哪些地方有角，但為什麼還要知道它是幾度角？以至於我們要讓孩子用量角器去測量它的度數？這個問題就難倒教學設計的人。其實我們也被難倒了。我們去問了一些數學老師，也在網路上找了很多跟這個單元有關的教案，好像也沒有人解答這個問題。大家都是發給學生一張紙，就讓他們開始量角度。

後來，老師忽然在學生遊戲的時候看到了這件事。他看到學校遊戲場裡有兩座溜滑梯，一個給幼稚園小朋友玩的，一個是給低中年級玩的，這兩個溜滑梯長得不一樣。四年級學生都不喜歡去玩幼兒園的那個，他們說溜起來好慢，都滑不下來；他們比較喜歡給低中年級溜的那個滑梯。於是老師就問學生說：「這兩個滑梯有什麼不一樣？為什麼會比較喜歡這個而不喜歡那個呢？」老師藉著這個提問，讓學生畫一個好玩的滑梯。不過有一個條件：要安全，不要變成自由落體。所以老師提供一個規則：「有一個安全標準哦。地面和滑梯之間的角度不可以大於 30 度角，不然就不安全。」30 度角是什麼樣？怎樣才會在一個簡圖裡畫出 30 度角呢？於是他們才開始去練習怎樣測量角。後面才發量角器讓學生去練習測量。最後，小孩子的工作就是畫一幅設計簡圖。



這裡複製的是他們畫的。圈起來的部份，就是用量角器畫出來的。這裡包括小朋友下課以後自己畫的裝飾，那些不是數學課要的東西，老師只是要他們畫一下想要怎麼樣的溜滑梯。開始設計溜滑梯之後，有學生問說：「那蹺蹺板也有這個規定嗎？」老師說蹺蹺板也有安全規定，不可以超過幾度角。於是學生有人接著畫蹺蹺板。其實那堂課的最後，老師還問說：「你們還想到什麼事情也規定不可以超過幾度角，不然會有危險的？」就有學生提出殘障坡道也有規定不可以超過多少度，不然的話會有危險。就這樣，老師把角度放到了生活情境裡去思考。所以，角度跟量測角度這件事，對學生其實是有意義、是有作用的，而且在生活當中可以幫助我們去判斷某些事情。

但是我們的課綱要怎麼寫才會引導出後面的教學？可以讓學生更朝向原先所想像的數學素養呢？未來的課綱能不能不再只是寫：「認識、理解某一個知識，或是應用某一個知識。」因為當我們這樣寫，很多教材編者和老師並不明白她／他後面該要做什麼？相當程度上，它也很難引導教材編者跟老師往數學素養的路上走。我想，各位數學教育專家有機會可以談談這件事。

- 數學領綱在各層目標的敘寫上, 如何回應數學素養的訴求?



數學領綱有好幾種目標：第一個叫數學素養/數學領域核心素養，它是一個最高層的目標。我們可以說它是 **Aim**。第二個是數學課程目標，它是 **Goal**，確實具體地說要有哪些知識、技能、態度、品味。下一層、更接近教材編寫跟教學的目標，就是學習表現。這三個是不同層次的課程目標。那麼，後兩個如何呼應數學素養的訴求？

學習經驗的選擇與組織

- 學科結構論
 - 掌握數學的學科概念與方法 (學科結構)
 - 學科結構可連繫低階與高階知識
- 經驗論
 - 由學生最可能獲得的經驗開始
 - 面對一個數學問題, 學生首先怎麼想?
- 學科結構論與經驗論如何連繫?

我們前面談過，怎麼去思考課綱裡面的內容和目標之間的關係。有了目標之後，接著的就是學習經驗的選擇跟組織。過去，談課程的一種非常經典的理論，叫做學科結構論。學科結構論從 1960 年代以來就非常盛行，到目前為止，我們仍然認為它非常重要。它的主要觀點是，能幫助學生掌握到學科結構，才算是讓學生學會這個學科。如果學生掌握數學的學科結構，低階跟高階可以聯繫起來，就可以聯繫小學到高中的數學知識。

當學生能掌握數學概念跟方法的時候，她／他才算是學會了數學。在我們

的教學現場，一定有教數學的概念，不過，概念可能不是探討來的，而是老師把概念當事實知識來講述。這個是長久以來我們最想克服的教學現場問題；老師知道要教學科概念，可是常常是講給學生聽和記憶，而不是引導孩子去探討。至於數學的學科方法，很多教室裡看不到教孩子方法。數學是一個規律的學科，如何去尋找數學裡的規律？它的規則、一致性是什麼？老師很少幫助學生使用尋找規律的方法，來建構數學知識。這也是在教師教學中最困難的一個點。很多教材都試圖把方法寫進來，不過進了教室以後，老師就直接把教材裡的方法跟學生講一次，失去了原來教材設計的用意。

另外一個重要的課程理論是經驗論。其實學科結構論跟經驗論這兩個理論是打對臺的，因為前者強調要讓學生掌握學科知識結構，但是經驗論——就是杜威這一派的觀念是說，學習不是首先看到學科知識跟結構，而應該先問：學生要怎麼開始學數學？他有什麼需要/動機要學數學？依據他的經驗和天性，應該先學數學的哪些概念，然後再是哪個概念？而不是按照大人認為的深淺順序去排列數學知識。在課程理論上，這是兩個非常典型的對立觀點。經驗論會強調，當學生面對一個數學問題，老師應該先問：「學生一開始是怎麼想這個問題的？」然後再決定我們怎麼談這個概念，而不是用大人的想法去說明這個題目該怎麼解。我想這個也是建構論非常強調的重點。

我今天跟單老師聊到 82 年建構數學，那數學教育史上非常值得探討的事件。這兩個理論其實是應該要聯絡的，現在我們希望用學生學習經驗作為起點思考，然後將他們帶到學科結構，這是所有教學者或者教材設計者都很想要做到的事；既不是只要學生的經驗，也不是只要學科概念，**希望學生經驗和學科結構能夠聯繫起來**，其實這就是現在我們最想要的「素養導向教學」。

★ 2個百、15個十、12個一合起來是()。

$$\begin{array}{r} \star 265 \\ + 97 \\ \hline \end{array}$$

★ 23個0.1 和 18個0.01 合起來是()。

$$\begin{array}{r} \star 14.87 + 0.3 = () \\ \star 14.87 \\ + 0.3 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} \star 2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{9} = () \\ \star 2\frac{3}{7} + \frac{24}{7} = () \end{array}$$

課綱的學習內容能否呈現數學知識的「結構」？

整數、分數、小數
運算規則的同構性

引自新北市昌平國小林心怡老師

看這個例子：整數、分數、小數運算規則的同構性——這個小學數學很簡單，我們都會。課綱的學習內容，有沒有辦法呈現數學的結構？像我們剛剛說

到，如果想要幫助學生掌握數學的結構，那麼學習內容要怎麼寫？現在領綱的學習內容又怎麼寫？有沒有辦法引導教材設計者或教學者看到這當中的結構？當然，我們會假設，編寫數學教材的人當然應該知道這些數學知識的結構。那數學老師不是理所當然也要好好分析一下：學習內容當中有什麼樣的結構，然後教給學生嗎？這是我們對教材編者跟對老師的假設。

但事實上是不是這樣？可能不是。很多數學老師可能沒有看到這個數學知識結構。如投影片所示，對於整數、分數、小數，它們具有運算規則的同構性，就是都可以用「幾個什麼單位」來運算，這是一個結構。但是老師在教這些數學知識的時候，可能是整數教整數的，分數教分數的；反正這個單元到了，就用這個單元的方法讓學生去練習、去計算，卻沒有幫助學生看到這裡面都是「單位」：幾個十、幾個百，或者是幾個 $1/9$ 叫做 $2/9$ ？幾個 $1/9$ 叫 $5/9$ ？這裡面其實有運算規則的同構性。領綱的學習內容有沒有可能幫助教材編者和老師看到這個性質？還是說，課綱委員認為那是教材教法的事，我們應該不用管這件事？

數與量
運算規則的同構性

$ \begin{array}{r} \textcircled{10} \quad \textcircled{1} \\ 3 \quad 8 \\ + \quad 2 \quad 5 \\ \hline 6 \quad 3 \end{array} $

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px;">公</td><td style="padding: 2px;">公</td><td style="padding: 2px;">公</td><td style="padding: 2px;">公</td><td style="padding: 2px;">小</td><td style="padding: 2px;">分</td><td style="padding: 2px;"> </td><td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">尺</td><td style="padding: 2px;">分</td><td style="padding: 2px;">斤</td><td style="padding: 2px;">克</td><td style="padding: 2px;">時</td><td style="padding: 2px;">鐘</td><td style="padding: 2px;">億</td><td style="padding: 2px;">萬</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">78</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">468</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">48</td><td style="padding: 2px;">53</td><td style="padding: 2px;">7685</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">+3</td><td style="padding: 2px;">56</td><td style="padding: 2px;">+3</td><td style="padding: 2px;">875</td><td style="padding: 2px;">+2</td><td style="padding: 2px;">45</td><td style="padding: 2px;">+9</td><td style="padding: 2px;">6402</td> </tr> </table>	公	公	公	公	小	分			尺	分	斤	克	時	鐘	億	萬	2	78	5	468	3	48	53	7685	+3	56	+3	875	+2	45	+9	6402
公	公	公	公	小	分																											
尺	分	斤	克	時	鐘	億	萬																									
2	78	5	468	3	48	53	7685																									
+3	56	+3	875	+2	45	+9	6402																									

引自台南大學謝堅教授

像這張投影片的例子，也是一種數與量的「運算規則的同構性」。其實在現有教材裡，孩子開始學習這些運算時，往往會覺得一頭霧水。因為每個運算規則都被當做是一個完全不同的東西來學習。然而，這些運算規則其實都有相同的結構性存在。

第二學習階段	
n-II-1	理解一億以內數的位值結構，並據以作為各種運算與估算之基礎。
n-II-2	熟練較大位數之加、減、乘計算或估算，並能應用於日常解題。
n-II-3	理解除法的意義，能做計算與估算，並能應用於日常解題。
n-II-4	解決四則估算之日常應用問題。
n-II-5	在具體情境中，解決兩步驟應用問題
n-II-6	理解同分母分數的加、減、整數倍的意義、計算與應用。認識等值分數的意義，並應用於認識簡單異分母分數之比較與加減的意義。
n-II-7	理解小數的意義與位值結構，並能做加、減、整數倍的直式計算與應用。
n-II-8	能在數線標示整數、分數、小數並做比較與加減，理解整數、分數、小數都是數。
n-II-9	理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。
n-II-10	理解時間的加減運算，並應用於日常的時間加減問題。

分、小數概念及加減運算

常見量的單位關係及換算

現在我們看看領綱裡面所寫的學習表現。就像投影片舉的一小段例子，學習表現就是一堆文字，告訴你要理解這個、熟練那個、解決這個。當一位教材設計者或是老師來看這個東西，其實不容易看到這裡面有什麼結構性存在。，我不知道領綱該不該協助這件事？如果想要協助，應該在哪個地方協助教材編者跟老師看到學科結構？否則的話，很多的教材都是把相同結構的東西放在不同的單元，當作完全沒有關係的內容來教。於是孩子的學習就會變成是零碎片斷的，好像每一次碰到一個單元都在學一個完全新的東西，殊不知這個單元其實跟另一個以前學過的單元，有相同的結構內涵，而學生其實可以運用前面學過的結構來做學習遷移。

目標模式 vs. 過程模式

- 課綱主要呈現目標與學科知識結構 (學習內容)，如何引導後續的教材編寫與教學過程，讓學生有更多機會「做數學」(do mathematics) ?
 - Behavior Objectives—
 - 理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。
 - 熟練數 (含分數、小數) 的四則混合計算。
 - Expressive outcomes—
 - 從操作活動中探索三角形、平行四邊形與梯形面積的計算方式，發現其間的共通性。

接下來，我想談談目標模式跟過程模式這兩個概念。所有的課綱都是目標模式，著重在學科知識，也就是現在的學習內容與學習表現。但是我們要让課

綱引導後續的教材編寫跟教學活動，怎樣讓學生有更多機會去「做數學」呢？如果我們可以想辦法，讓領綱的呈現方式可以引導老師讓學生做數學，或許未來整個數學的教材或是教學，會有些轉機。

在目標模式上，我們所想的目標都是 **behavior objectives**（行為目標），包括前面說的「理解」。比如說理解三角形、平行四邊形、梯形面積的計算，熟練數的四則混合運算，這種寫法叫做行為目標。而且它不是很標準的行為目標，標準的行為目標是動詞都要能操作，至少這個「理解」並不是一個能操作的動詞。但是我們當代並不講究行為目標，領綱也不適合用那些能操作的動詞，所以寫「理解」其實是對的。我只是要用這個例子來說，像這樣的寫法我們就指出一個終點，就是：你要理解這件事，這就交代完了。

另外一種目標叫做 **expressive outcomes**，這是過程模式的課程設計想法。這個想法就例如：從操作活動中去探索三角形、平行四邊形、梯形面積的計算方式，發現其中的共同性。中文把 **expressive** 翻譯成「表現性的」，這樣的一個課程目標寫法就是：沒有寫要熟練什麼東西，寫的重點是：要透過什麼樣「做數學」的過程去發現什麼東西。這個寫法跟上面 **objective** 的寫法，整個課程設計的思維是不一樣的。

我們未來的領綱目標，可不可以更為傾向後面 **expressive outcomes** 的寫法？也就是學生透過什麼樣做數學的過程，然後我們希望他去找到什麼樣的結果，希望引導他去發現什麼，裡面包含了過程與方法，而不是要他去熟練、去理解某些知識。如果我們藉由過程模式跟目標模式的架構來看，現在課綱是目標模式課程設計比較會寫出來的目標，後者是過程模式的課程設計會寫的目標。後者會希望更有開放性、更有探索性。至於學生探索出來的結果，每個人會可能有點不太一樣，最後仍然可以歸納出共同的原理原則。

- 倘若我們希望教室裡的師生經常在「做數學」，
 - 學習內容的量能否調整？
 - 學習表現能否更傾向 **expressive outcomes** ？

假如我們很希望老師跟學生都經常在教室裡做數學，我們的學習內容的量

能不能調整？每個老師都說：哇，這麼多東西，我光是把它講解完就已經了不起了，你還要我跟學生探究，還要讓他分組討論、發表、說他的想法，再來互相校正你的想法如何，我的想法如何，還要反思：「剛剛為什麼我這樣想不是很正確，我錯在哪裡，別人那樣想為什麼就可以解出來，我跟他的想法不同在哪裡。」怎麼可能？

我們想要學生有後設認知，但是每次跟老師說：「你可以這樣教數學」，老師都會說：「一本教科書裡面有那麼多單元，這每一個我都教不完」。所有老師都說：「我一路趕課趕不完，根本不可能在教室裡做這種探究，讓學生去互相理解對方的解法，讓他們想：這樣解跟那樣解的差異在哪裡？我們可不可以找到最佳解？」老師們說，如果這樣做，我好幾節課只能教一題，整個進度都趕不上了。所以，學習內容的量，有可能調整嗎？這個我不太知道，因為我不確定：如果想要在某一個階段幫助學生理解數學知識結構，怎樣才是一個合理的量？

第二個是學習表現，他的寫法能不能更傾向 **Expressive Outcomes**？不是只提出終點，說：「你要理解這個，你要應用那個」，有沒有可能更引導老師們可以在教室裡面做數學。

學科結構與學生經驗的連續性， 從課綱開始

以上是我對數學領綱的一些觀察。

我想，學科結構跟學生經驗之間，必須要建立一種聯繫性。而且，好像不能指望老師到了教室以後，自己想辦法去做，或者編者自己想辦法去寫。是不是可以從領綱開始去引導這樣的想法跟做法，而不是我們領綱就一直維持著這樣的寫法？即使後面寫了很多補充的《課程手冊》，然後再編很多教材教法的書，來告訴所有的編者跟老師說：「你要這樣做、那樣做」。可是當他們回頭看領綱，就會說：「根本不是這樣啊」。要如何從領綱裡面就可以看到，在每一個學習階段裡面，我可以跟學生怎麼樣探討數學？數學教室裡面應該有的探究

性，有沒有可能在領綱就開始有一些引導？而不是都留到後面，讓所有的教材編者跟老師再來想辦法對付這個難題。

這是一個數學的門外漢，純粹從課程理論的角度對數學領綱所做的觀察和心得報告，藉這個機會就教各位數學教育專家。