

國科會數學教育學門課綱研究 SIG 諮詢會議記錄

## 搭配時代脈動的數學課綱雜想

謝豐瑞 · 2023 年 10 月 13 日

國立臺灣師範大學數學學系

yuanyuan@mail.ntcu.edu.tw

吳正新、吳昭容、林勇吉、單維彰、鄭章華現場與會，林原宏、陳維民看錄影

黃芯淇初稿 2023-11-15

單維彰一修 2023-11-26

謝豐瑞二修 2023-12-21

單維彰三修 2023-12-25

單維彰四修 2023-12-27

### 我看課綱變革角度

其他學科領域

就業變革

國際評量研究現況

我們首先從其他學科領域入手，因為數學是基礎。同時，我們也要關注職業和國際評估的變化。

一個撼動

106年4月11日

首頁 > 中時 > 生活

即時首頁 | 政治 | 生活 | 社會 | 旅遊

未來大學選才採計 數學失寵

難道數學的地位被撼動了嗎？

為什麼外國沒有這樣呢？

這實際上是在另一個演講中提到的。在 108 課綱實施之前，也就是 106 年

的 4 月 11 號，我看到一則新聞標題，類似「未來大學的數學要求，數學失寵」。當時我感到困惑，為什麼我們的數學地位會受到撼動，而國外並沒有這種現象？

## 大學端選才重視

教育部提及：

顯示資訊科技所強調的運算思維、邏輯思考以及數位時代資訊素養的重要

生活科技屬於跨領域與動手實作課程，這也顯示大學端看重學生的動手能力

學習歷程各項目	關聯性較強的學群數
自傳	17
加深加廣選修課程(部訂課綱)學習表現	16
校訂必修課程學習表現	15
多元選修課程(校訂選修)學習表現	15
檢定證明(語文檢定、技能檢定等)	15
學習作品或檔案	15

我查看了教育部完整的調查報告，教育部調查了 18 個學群，其中有 15 個學群認為多元選修課程與他們相關性較強，這些多元選修課程是校定選修，我樂觀地想，應該有很多與理工及商科相關的學群會認為多元選修數學與他們有關連吧？

## 教育部調查共18個學群

學	群
文史哲	工程
外語	財經
藝術	地球與環境
大眾傳播	社會
法政	資訊
心理	管理
教育	數理化
遊憩與運動	生命科學
建築與設計	醫藥衛生

46%的學群不需要高中數學

部定必修科目	關聯性較強的學群數
國語文	18
英語文	18
資訊科技	12
生活科技	11
數學	10

56%

教育部強調這份調查結果顯示，大學端重視「資訊科技」中強調的運算思維、邏輯思考以及數位時代的資訊素養。同時，大學端也重視「生活科技」這類跨領域並且包含動手實際操作的課程。數學似乎並沒有這些特質。

看看這 18 個學群的調查結果，我發現一個令人沮喪的事實，不要妄想多元選修或校定必修，即使部定必修課程——也就是國家規定高中必修的數學課程，是只到高二的數學課程——這個課程竟然只有 10 個學群認為與它們較有關聯性，代表著只有 56% 的學群認為部定必修數學課程與他們相關。換句話說，有 44% 的學群認為高中數學對他們來說不是必需的。

反觀國文和英文是這 18 個學群全都認為必要的科目。有 12 個學群認為資訊科技有關聯，11 個學群認為生活科技有關，數學由第二名掉到第五名，國文、英文仍如前並列第一，資訊科技與生活科技分別高居第三、第四名，擠下數學。

這種情況令人擔憂，特別是對於「應該」需要數學知識的學群，例如建築與設計——他們不認為與數學有關聯——這種認知似乎不太合理。高中教育已經被納入國家基本教育中，怎麼可能那麼多領域認為部定必修數學跟它們無關？我們有必要關注這個問題，並思考為什麼有這麼多人認為數學對他們不重要？

## 建築與設計學群高中課程諮詢輔導參考表

學習內容	學習圖學、色彩學、設計概念、建築設計、景觀規劃與設計等實用功能及美學整體表達。
相關學群	地球與環境學群、藝術學群、工程學群
主要學類	建築、景觀與空間設計、都市計畫、工業設計、商業設計、織品與服裝設計、造型設計
興趣類型	實用型(R)、研究型(I)、藝術型(A)
重要能力	閱讀能力、操作能力、空間關係、抽象推理、藝術創作
生涯發展	建築師、景觀設計師、室內設計師、美術設計師、商業設計師、工業設計師、多媒體設計師、服裝設計師。
知識領域	設計、藝術、建築與營建、歷史與文化、社會學與人類、傳播與媒體
與部定必修相關	美術、藝術生活、國語文、英語文、資訊科技、生活科技
與加深加廣選修相關	藝術跨科課程、國語文、英語文
與學習歷程檔案相關	學習作品或檔案、競賽表現、自傳、加深加廣選修學習表現、多元選修學習表現

建築法規

讓我們對建築與設計學群進行更深入的探討。這個學群主要包括建築、空間設計、都市計畫、工業設計、建築師的生涯規劃，以及建築與營造的知識領域。然而，令人不可思議的是，他們認為自己的專業與部定必修中的數學課程無關。這引起了我的關注，特別是當我之前看過內政部關於建築物耐震設計規範的公告，這個規範中數學的應用相當多。為什麼這些學群會認為數學與他們無關呢？這是一個令人困惑的現象，大家可以深入研究一下。

## 學群課程諮詢輔導參考表中與高中選修數學相關

數學甲、乙	數學乙
數理化學群	財經學群
工程學群	管理學群
資訊學群	
醫藥衛生學群	
地球與環境學群	

四成四學群不需高中任何數學  
 六成一學群不需高中選修數學 **數學應該轉為選修？**

讓我們再仔細看看這些學群中，特別是那些自認與選修數學甲、數學乙有關聯的學群。這些學群與數學的關聯性非常高，包括數理化學群、工程、資訊、醫

藥衛生、地球與環境，以及財經跟管理等學群。令人擔憂的是，只有這七個學群認為我們的選修課程與他們相關，這意味著有六成以上的學群不需要高中選修數學，有四成以上學群甚至不需要必修數學。

這種情況讓人感到不安，尤其是與國語和英語的情況相比。這引發了我對數學在高中課程中的地位的質疑，難道我們應該將數學變成選修課程嗎？為什麼會這樣呢？為什麼那麼多學群完全不需要數學呢？如果六成以上的學群不需要高中選修數學，那為何全部高中生還要被迫修高三的數學？合理性到底何在？更甚者，四成以上的學群不需要高中必修課程，這麼高的比例，那麼為何全國高中生都得修部定必修數學呢？好在這次還沒到「多數」學群不需要部定必修數學，那一天會來臨嗎？真的很可怕！

## 同樣的是AI世代 為何西方社會數學的地位沒被撼動？ 為何台灣數學的地位被撼動？

如何讓數學名正言順的居於高中首要必修課程之一是數學課綱的責任

為什麼在 AI 時代，西方社會的數學地位並未動搖，而臺灣的數學地位卻受到了擾動？這是一個令人困惑的問題。對於課綱的制定，我希望未來的委員們，這些學者和專家能夠確保數學在高中課程中保持其地位，成為首要必修課程之一。不是透過抗爭，而是要名正言順，是透過對課綱的修訂，讓課綱能符合需求，去除只為數學而數學的內容，捨棄本位主義，讓高中數學真的成為「國民基本教育」中「服務」其他領域的一門學科，而不只是為了頂尖大學或大學數學系內容做預備的科目；我對這些委員們抱有期望，希望他們能夠讓數學起死回生，確保數學的地位不會受到擾動。

新課綱需思考的問題？

## 理想面

學生未來的需求：  
就學**有用**、生活**有用**

## 實務面

1. 從其他學群來看，**有用**的數學有哪些？
2. 從課審委員的角度，**數學用處**為何？難度配置為何？
3. 從數理領域的角度，高中**必需**涵蓋的數學有哪些？
4. 從數學家的角度，數學內容可接受的讓步有哪些？(例如，可否割捨數學歸納法？)

雜想一：數學必須有用

有一些問題讓我們值得思考。首先，為什麼其他學群覺得數學不重要？我們需要思考，讓學生明白數學的實用性，也就是他們為什麼應該學習數學？以及如何調整課程內容，以滿足學生的需求？

在課程設計方面，教育者需要更深入地了解數學，以確定數學在高中課程中的地位，以及難度的配置。此外，我們需要檢視高中數學中必須包含哪些內容，以確保學生不會因無關的內容而失去學習其他重要內容的時間。

最後，我們需要檢視數學課程的內容是否過於繁雜，是否過於從純數學的角度出發？我們應該考慮如何使數學更有實用價值，並避免過於偏向純數學。這將有助於確保數學在不同領域中的實際應用，並確保數學仍然被視為一門重要的學科，而不是被視為無用的科目。

從理想面來講，我認為第一點應該是關注學生未來的就業市場和他們的生活需求，因為這將對大學教育產生影響，並向下改變教育體系。近年來，一些大學已經在科系和教學內容方面進行了重大改革，包括數學課程的調整。這些改革可能會影響高中和國中教育，因此我們需要考慮這些變革的順序和重要性。

有時候，我們可能更關注國中階段的教育，例如如何在教科書中包含哪些幾

### 理想面

學生未來面臨的就職市場  
將向下改變大學教育  
將向下改變高中教育  
將向下改變國中教育  
將向下改變國小教育

何性質。但實際上，關注高中的需求同樣至關重要。不必要的內容可能會占用學生的時間，而這些時間可以用於學習對他們的生活和未來學習更有意義的內容。

以下這份研究報告來自麥肯錫全球研究中心，是一個著名的研究機構。該報告發布於 2022 年，針對 47 個國家中 80% 的工作進行了研究。值得注意的是，這份報告發布於我們 108 課綱實施之後，所以它反映了當今的就業趨勢。

此外，該研究機構早在 2017 年就曾經公佈過一份預測報告。那份預測報告指出，有 50% 的工作時間可能會被自動化技術所取代。他們使用「場景」來探討這種可能性，並設想在 2045 年這一情況可能實現：也就是預估到了 2045 年，在 80% 的職業中，有一半的工作可以被自動化技術所取代。這項研究強調了自動化對未來就業市場的潛在影響，這對教育體系的調整和數學課程的設計都具有重要意義。

## 麥肯錫研究47個國家80%工作之2022年報告



摘錄自 <https://www.mckinsey.com/capabilities/mckinsey-digital/our-insights/the-economic-potential-of-generative-ai-the-next-productivity-frontier#work-and-productivity>

當麥肯錫全球研究中心在 2016 年做此研究時，根據當時建立的模型，在 2035-2070 年間，各種職業當中的 50% 工作可能會自動化，而中位數預測落在 2053 年。到了 2021 年再做此研究，把生成式 AI 納入場景，新的模型顯示 80% 職場中的工作，將在 2030 年至 2060 年間達到 50% 的自動化，而中位數是 2045 年。這意味著自動化的發展正在加速，對就業市場造成更加急遽的變革壓力。

## 麥肯錫研究47個國家80%工作之2022年報告

- 2016年建模的採用場景顯示，該年工作活動中花費的50% 時間將在2035 年至2070 年之間的某個時間實現自動化，中點場景在2053 年左右。2021更新的採用場景考慮了生成式AI 的發展。新的建模顯示，**到2023 年，工作活動將在2030 年至2060 年間達到50% 的自動化程度，中點為2045 年**，比之前的估計加速大約十年。

(摘錄自：Mckinsey Global The economic potential of generative AI: The next productivity frontier)

- **若118實施新課綱，則118年小一學生到2045年22歲，高一學生31歲，正值進入勞動力市場。**

如果我們考慮到 2045 年的情況，我們應該思考如何幫助當時年紀約為 22 到 31 歲的學生應對自動化帶來的挑戰。這也意味著我們應該重新考慮數學課程的內容和設計，以確保學生能夠在這個自動化時代，獲得適當的數學知識和技能。因此，我們的課程設計應該能夠滿足學生和社會的需求，並且讓人們認識到數學的重要性。

## 從美國看世界\_生成式AI對職業的影響

### 麥肯錫全球研究院2023年7月26日的報告

- 到 2030 年，**生成式AI**加速了美國工作的自動化趨勢。目前占美國經濟工作時間**30% 的活動可能2030會自動化**。
- 美國將需要更大規模的勞動力發展以及雇主更廣泛的招募方式。雇主需要根據技能和能力而不是證書來招聘。生成式AI 增強了 **STEM、創意、商業和法律專業人士的工作**，而非消除了這些工作。
- 到 2030 年，可能還需要 **1,200 萬人進行職業轉型**。隨著人們離開日益萎縮的職業，從事低薪工作的人需要更換職業的可能性是高工資崗位人的 **14 倍**，而且大多數人需要額外的技能才能成功地做到這一點。

根據最新的麥肯錫報告，深度 AI (Artificial Intelligence) 將加速美國工作自動化的趨勢。預計到 2030 年，約 30% 的經濟工作活動可能會被自動化。這將導致美國需要更大規模的勞動力發展以及更廣泛的僱主招聘方式。

報告指出，僱主未來可能會更加重視候選人的技能和能力，而不僅僅依賴證書或文憑。這種趨勢可能對傳統的學歷要求帶來變革。



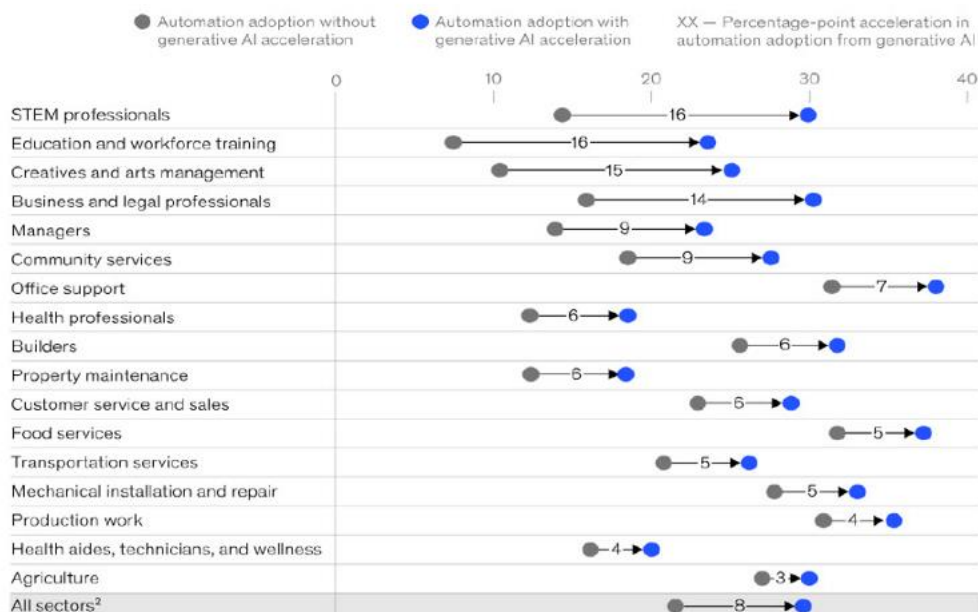
此外，深度 AI 可能會強化 STEM（科學、技術、工程和數學）、創意、商業和法律等專業人士的工作效能，而不是完全消除這些工作。這些專業人士可能會透過 AI 的協助提高工作效率，增加收入。

報告還提到，到 2030 年，可能有大約 1,200 萬人需要進行職業轉型，以適應新的工作需求。特別是那些從事低薪工作的人，他們需要轉換職業的可能性是高工資崗位的人的 14 倍，這顯示了自動化對低薪工作者的衝擊。

以下這份報告則顯示加速情形。到 2030 年，30% 工作可能被自動化取代，尤其是由於生成式 AI 的出現，使自動化加速。這種加速可能會改變原先的預測，使 AI 的發展速度更加不確定。不同領域的自動化影響也不盡相同，STEM 領域（科學、技術、工程和數學）預計加速 16%。同樣的，教育和職場培訓領域也預計會加速 16% 的自動化；特別要注意的是，教育與職訓領域原本預估 2030 年僅有約 7-8% 的自動化，加速後可能達到 20% 以上。其他領域如辦公室支持和餐飲服務，自動化比例本來就相對較高（30% 左右），現在可能進一步提高，這些領域的加速幅度較小，約為 8%。

**With generative AI added to the picture, 30 percent of hours worked today could be automated by 2030.**

Midpoint automation adoption<sup>1</sup> by 2030 as a share of time spent on work activities, US, %

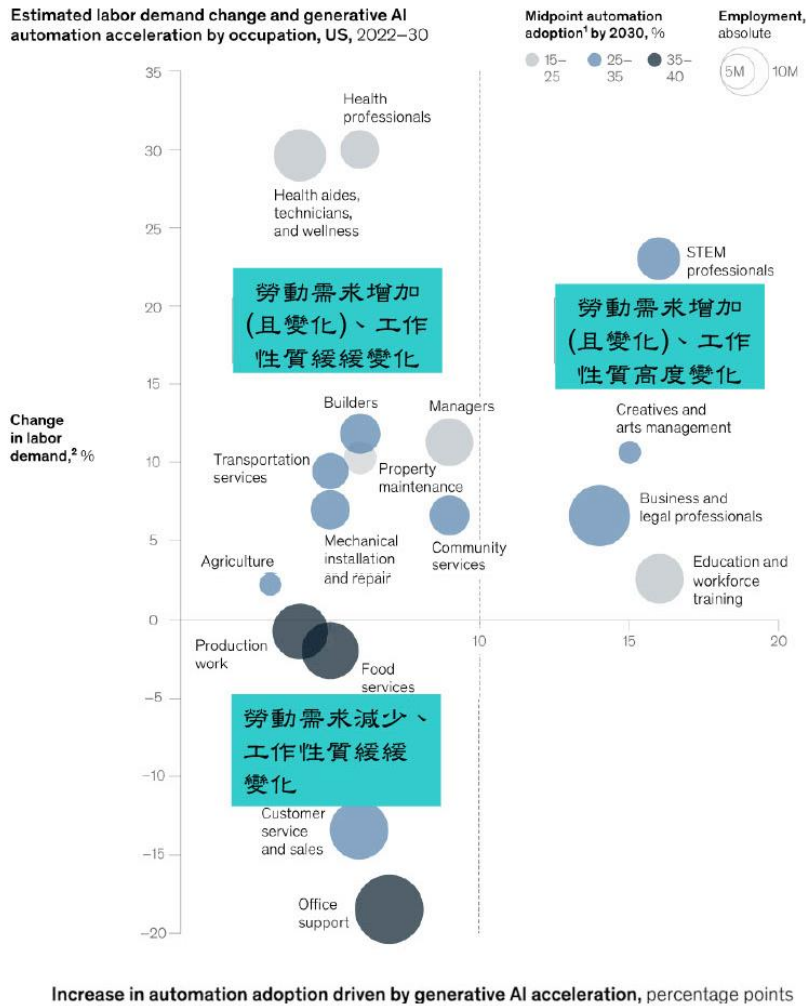


<sup>1</sup>Midpoint automation adoption is the average of early and late automation adoption scenarios as referenced in *The economic potential of generative AI: The next productivity frontier*, McKinsey & Company, June 2023.  
<sup>2</sup>Totals are weighted by 2022 employment in each occupation.  
 Source: O\*NET; US Bureau of Labor Statistics; McKinsey Global Institute analysis

摘錄自 <https://www.mckinsey.com/mgi/our-research/generative-ai-and-the-future-of-work-in-america>

接下來看一份象限圖，橫軸表示生成式 AI 所驅動的自動化增加比例，縱軸表示勞動力需求的增加——注意縱軸有負數，表示需求減少，最嚴重可能減少 20% 的勞動力需求。

**While STEM, healthcare, builders, and professional fields continue to add jobs, generative AI could change work activities significantly for many occupations.**



勞動力需求轉變：考慮影響需求的多種驅動因素：收入增加、人口老化、技術投資、基礎設施投資（包括兩黨基礎設施法）、教育水平提高、淨零排放轉型、無償工作市場化、新職業的創造、自動化（包括生成式AI），增加遠端工作和虛擬會議，以及電子商務和其他虛擬交易。

摘錄自 <https://www.mckinsey.com/mgi/our-research/generative-ai-and-the-future-of-work-in-america>

前面象限圖的這份調查考慮了多種驅動因素，如收入增加、人口老化、技術和基礎設施投資、教育水平提高、近零排放和無障礙工作等。這些因素導致勞動力市場的變化，例如遠端工作和虛擬會議的普及。圖的左側代表工作性質變化較緩慢，右側代表工作性質高度變化。例如，根據圖表，醫療與健康專業、STEM 專業、創意和藝術管理、教育等領域的工作性質轉變速度較快，但是這些產業的預估勞動力需求增加幅度不一，例如 STEM 專業增加較多，教育與職訓領域增加較少。至於勞動需求減少的領域，包括餐飲業、製造業、顧客服務、銷售、辦公室支援等，這些領域的工作性質相對穩定，但就業市場萎縮，例如文書工作的需求可能不那麼大。

## 雜想二

不能再以傳授純知識這種觀念發展數學課綱。

人長壽了！

純粹知識的探討可以且應該留到大學。

↑  
探討目前往往以  
證明的形式呈現

我一直認為課綱本來就要考慮這些社會的變動。說說我自己曾經參加過的美國 Common Core State Standards（由聯邦政府公告的共同核心課程標準）。他們那時候參與的人數很多，好像有 200 多人吧；只有兩個外國人，我是其中一個，另外一位好像是 OECD 的一個什麼教育委員會的主席吧。我看到他們做事情，感受很深刻，他們確實收集了很多資料，也討論很多他們社會的未來需求，從需求的角度去發展他們的課綱。其實我回國第一個想做的國科會研究就是從各大學科目的需求來檢討我國的高中數學課綱，只是可惜當時國科會不喜歡這個題目。

當然本來大家就會思考這問題，只是如果要從就業的角度或國家發展角度來看數學課程，有時候也不是我們這個小小的能力可以做的。但是單老師在這一次，能夠這麼早就開始做一些規畫、探討，我是覺得在場的各位學者還有很多事情可以做：從未來需求角度去看的話，還有很多事情可以做。譬如說，其他學科到底為什麼覺得數學跟他們沒關聯？什麼樣的數學才會讓他們覺得是需要、是有關聯的？我們是不是可以讓他們去勾選或是什麼，我覺得這是很重要的：到底人家需要哪些數學，然後我們怎麼樣才能夠提供服務。

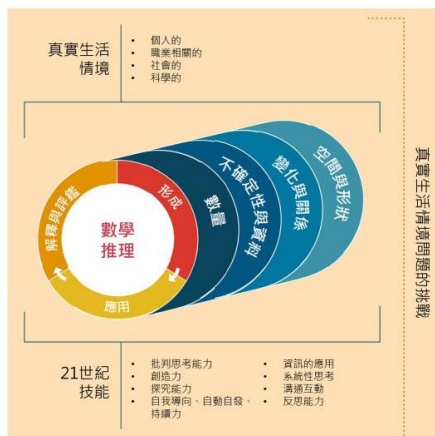
基本上，從剛剛轉述的未來趨勢研究來看，再加以其他學群覺得數學不重要這個現象，我的第二個想法就是：我們不能再以純粹傳授知識這樣的觀念來發展數學課綱。當然也許有的人會覺得我們課綱目前也不是這樣，但是我個人看起來其實絕大部分還是在傳授純數學的知識。這個情況在高中還是比較嚴重，可能一直認為高中要跟大學數學連結起來。我的想法是：我們現在都比較長壽了，不是嗎？現在的大學算就像以前的高中而已啊，所以純粹知識的探討，也許可以——甚至說應該——留到大學。我們目前看到教學現場有很多的數學探討——其實不是真的探討，而是直接證明——這樣的探討，或者問這樣的證明，在高中有必要嗎？也就是一個很現實的問題，這些證明真的有用嗎？

第三個觀點，我想要從國際研究來看，特別是 OECD—主辦 PISA 的機構—

的數學「素養」主張。

## PISA2022數學素養的定義

個體在各種真實世界的情境脈絡中，進行**數學推理**並透過**形成、應用、詮釋**數學以解決問題的能力，包含運用數學概念、程序、事實與工具，來**描述、解釋和預測**現象。數學素養促進**個體瞭解數學在世界中所扮演的角色**，並促使個體作出有根據的判斷與決策，此乃成為具建設性、投入性與反思力的21世紀公民所需。(OECD, 2018a)。



PISA 2022 數學素養架構 (OECD, 2018a)

## PISA2022數學素養的特色

- 數學素養不僅側重於使用數學來解決現實問題，而且還將數學推理確定為數學素養的核心地位。在數學內容方面，除了原有的數量、不確定性與資料、變化與關係、空間與形狀外，特別強調電腦模擬、有條件的決策、增長現象、幾何逼近。
- PISA 2021在架構中也納入了21世紀應具備的技能。



目前來講，做到最高年級的國際評比就是 PISA 了：做到九年級十年級的學生，所以基本上算是有到高一的學生。剛好 2022 年的評量主題是數學。我想要強調：在 2022 年的數學評量目標上，有一個項目叫做數學推理；PISA 認為「**數學推理**」是數學素養的核心地位。PISA 的數學推理當然不是我們認為的數學證明，他們沒有數學證明在任何考題裡面，但是他有很多真的數學推理，也就是那些「要能用得出去」的東西。在 PISA 的評量內容中，特別強調了：電腦模擬、有條件的決策、增長現象跟幾何逼近，他們認為這些是現在這個時代必須特別專注的數學內容，也就是把數學的學習跟人們如何做決策、怎麼詮釋現象這些事情關聯起來。PISA 還增加了 21 世紀應具備的技能，我想大家都非常熟這八個技能。

## 21世紀的技能 (21st Century Skill)



回顧剛剛舉出的三大點：

- 其他學群對我們的不需要
- 就業市場可能有的大變革
- 國際評量所擬定的內容與目標

我覺得討論數學課綱的團體需要更開放，就是先要有夠多夠雜的人，讓各種思想進來以後，大家才有足夠完整的討論、選擇的機會。

其實在很早以前，應該是民國 85 年的時候，本來國中數學課程就有分必修跟選修。必修把內容大幅往下降，讓選修比較難一點。本來選修打算要分組教學，後來是學校反對，因為他們覺得分組教學，學生跑來跑去的，學校行政很難做。我覺得臺灣比較難好好地、真正地為學生的發展而來做教育。包括像我們說的使用計算機，很多校長都反對，就是覺得行政上有麻煩。臺灣還是有一個比較麻煩的事情，就是行政會阻礙很多事情的推動，大家都會想到「這個有行政上的困難」就止步了。連會考的也是這樣，比較不願意為了教育理念而克服行政的麻煩。

但是我們今天既然看到了社會的變動是這麼的大，然後也看到了教育部的調查，知道我們數學的重要性一直在往下降，這時候我們是不是可以真的要有變革，才能夠因應時局的變化？

就業市場的巨幅轉型，是不是意味著數學課綱也要大幅轉型？這個我沒有答案，但是我覺得這是一個可以思考的方向。

## 課綱格式

### 能力指標？還是內容指標？ 教科書審查者的工具

談課綱，第一個想到的可能是內容。內容要轉型，但我等一下再談什麼樣的內容需要轉型。格式也需要轉型嗎？

格式轉型是我在審查教科書的時候，感覺比較深刻的。因為審查者必須以課綱為根據，有的時候如果課綱寫得太模糊，審查者要做判斷或決定規準的時候，變成好像在跟主編打架。如果在課綱這種前端的地方，可以做更深入的探討或者規畫，總比後面審查者沒有做研究，審查者自己判斷好吧？把前端做好了，審查者就比較不需要跟書商之間有那麼多的往返爭辯。

## 從就業市場及就學需求改變雜想數學課綱變革

### 大方向雜想

- 數學課綱內容是否也需要因應大幅轉型？內容轉型、格式轉型？能否有**真正的選修**？
- 根據其他學科需求，是否增加(必修或選修)離散數學、機率統計、線性代數這些領域的基礎；是指**真正帶有發展性思考與推理的基礎**，而非封閉性證明的基礎。
- 減少專家解法的內容，技術性運算的內容，這些都是目前科技就可以處理的，不需要人來算。應用性與思考性內容應強化。[\(舉例\)](#)
- 學生應學怎麼使用思考及科技工具解決問題，而非學數學家的思考與推理，畢竟，全台灣學生將來會成為數學家的如滄海一粟。
- 數學證明減少數量、降低難度。

在內容調整方面，我認為大方向就是思考：有沒有真正的選修？我們剛剛看到大學端真的覺得我們的高中數學跟他們關聯那麼少，那**我們為什麼一定要全部的人陪著那一小群有需要的人，花那麼多的時間學習數學，然後得到那麼多的挫折？**我們可不可以有真正的選修，而不是名義上的選修。譬如說提供針對財經需要的選修，就是有不同種的選修讓學生真的選，包括有的學生可以真

的不選，不然他們很可憐。像語文專業的人學那些數學有什麼用？我自己說真話，就是浪費他們的生命而已。我覺得我自己是受惠者，因為我本身就是數學學起來比較輕鬆的人，但是我看到很多好朋友，他們當時數學都是考 0 分，就是很痛苦。

其次，根據其他領域的需求，我們如何調整必修的內容？是否可以討論哪些內容要做一些變化，如何回應其他學科的需要？有的領域真的不需要太高深的純數學。例如：**數學分析可能不那麼被別的領域需要**，機率統計一定是比較重要的嘛。機率在各個領域中的需求性可能會更高，線性代數不但在理工領域裡面非常重要，財經領域可能也會需要。

我想強調發展性思考與推理的基礎。封閉式的基礎內容，例如我告訴你這個東西有用，教會你可以去用，我覺得這樣也很好，畢竟真的具體有用。但如果說封閉式的教學內容再加上證明，那就是真的為了數學而數學：那種證明基本上都是為了數學學科知識而做的。

我們是不是可以減少專家解法的內容、技術性運算的內容？這些都是目前科技就可以處理，不需要人來算。相對地，我覺得可以再增加應用性與思考性的內容。現在所有的計算，電腦都可以幫你做，學生本來就應該有使用工具的權利。我這裡用一個 PISA 2022 年施測例子來說明，因為不能公布原題，所以我模擬了下面這個類似題，此題與 PISA 原題具有相同的數學結構及解題思考流程。

虛構情境與題目：

有一個遊戲，一個人 24 秒搖的鈴鐺次數再加上 32 就是他當下可以賺到的金額（可以不是整數）。小柯覺得用 24 秒數不夠精準，用 1 分鐘數搖鈴鐺的次數可能更準確。如果用  $n$  表示 1 分鐘數出來的搖鈴鐺次數，則他可以賺到金額  $M$  之公式為何（使用  $n$  來表示）？  $M=$ \_\_\_\_\_。

這一題考的是形成函數，答案只是一元一次式，國一的內容，但是我們施測的九、十年級學生答對率超低，更嚴重的是十年級的答對率僅約 20%，比九年級還低了 10%；施測時間點是十年級學年的後期，函數在高中又再次接觸過，這是否表示學生的腦筋已經拒絕思考了？太多複雜的內容使學生的思考僵化了。我認為發展思考與推理而非專家解法的內容在課綱中應更慎重被對待！

學生應該學怎麼樣思考，怎樣使用數學觀念及科技工具來解決問題，而非學習專業數學家的辯證與推理能力。我每次在課堂看到，或者是看到教科書應審查者要求，一定要把數學證明完整寫出來的時候，我真的是感覺很替另一半的學生不捨。我覺得：好可憐啊，你的生命就是坐在那邊聽這些你這一輩子再也用不到的東西。重點是，你也聽不懂，你就是傢俱啊，跟教室裡的課桌椅一樣；課桌椅沒情緒，學生還有個負面情緒。

所以我們從全臺灣的學生來看，將來會成為數學家真的非常少，何必在高中的時候去荼毒他們，讓他們害怕數學、討厭數學？沒有必要啊，他們的美好光陰應該還給他們，讓他們做些有意義的事情。

我一直認為數學的證明應該要減少份量跟降低難度。未來就業市場中，有多少數學證明的需求？那是頂尖的研究者才會有的需要，那些人可能都要讀到博士，將來學習數學證明的機會多得是。其實科技領域現在很需要數學頂尖的人，很多企業會來我們師大數學系招募博士班研究生去工作，薪水都很好，但反而是我們學生自己不敢去，因為他們覺得他們其實去了也解決不了企業的問題。就是真正需要他們解決的科技問題，他們其實沒有能力解決，他們只會在數學領域中推理與證明，沒辦法真的出去應用。這是很悲哀的事情。

## 從就業市場及就學需求改變雜想數學課綱變革

### 中方向

- 減少與轉型微積分的內容(只需涵蓋基礎觀念)，應著重應用。應用需使用科技取代紙筆計算。
- 函數是未來非常重要的概念，增加透過數量推理形成函數是有價值的內容，而非傳統的介紹數學家思維與解法的函數內容。[\(舉例\)](#)
- 增加電腦模擬、有條件的決策、增長現象、幾何逼近的內容。[\(舉例電腦模擬決策\)](#) [\(舉例增長現象\)](#)

前面提了調整內容的大方向，現在來說說中方向，第一個就是微積分。我們如果今天看國外的高中微積分課本，完全沒有這麼難的內容。有些人覺得我們的課程現在微積分已經很少，如果再減少就真的真的太少了。也有些人會把微積分當成選修，可是我們不是真的選修，學生全部都要學啊，那怎麼可能是真的選修？如果說能夠真的讓它變成一個選修，好好的去帶一些有需求的學生。對於不是真有需求的高中生，其實也可以考慮 *precalculus* 這樣子的內容，就是不要真的到 *calculus*。目前我們的課綱已經有很多 *calculus* 的內容在裡面，絕對不是 *precalculus*。

如果我們真的要涵蓋微積分，是不是著重基礎觀念與應用就好了。所謂的應用是，不用管這算法怎麼來的，今天就是一個工具在那裡，可以讓我去用，讓我去達到解決問題的目的；運用科技來取代計算。

函數是未來非常重要的概念，108 課綱已經知道函數非常重要，所以也就確實很著重函數。但是我們看到的結果，又還是落入數學家思維的函數，就是為函數而函數的那種感覺，真的可能只有數理方面的人才有需要，其他領域學的這東



西到底對他們有什麼用處？我是真的看不太出來。也許厲害的人就用得出去，但是他們可能真的會用不出去，從上面舉的形成函數的例子，我們可看出來，那麼基礎的一次函數還是很難的，回歸我們高中課本上有的函數內容，真有天壤之別。

剛剛講 PISA 的時候，可以看到數學推理中的數量推理是蠻重要的。由數量推理來形成函數，就是數學建模的基礎。未來，建模之後的求解技術都已經自動化了，建模的價值會比技術性的運算能力高很多。所以是不是我們應該可以涵蓋多一點函數在模型上的應用教學？

再來就是我們有沒有可能去增加 PISA 提倡的電腦模擬、有條件的決策，跟增長現象、幾何逼近的內容？

## PISA數學素養範例試題1：使用智慧型手機 (1)



使用智慧型手機  
簡介  
先閱讀簡介，然後點選「下一頁」的箭號。

使用智慧型手機  
試算表中顯示的是部分亞洲國家的人口數（單位：百萬人），及其使用智慧型手機的人數（單位：百萬人）。這些數據是按國家的英文名稱順序排列。

A欄	B欄	C欄	D欄
國家	人口數 (百萬人)	使用智慧型手機 的人數 (百萬人)	
孟加拉	166.735	8.921	
印尼	266.357	67.57	
日本	125.738	65.282	
馬來西亞	31.571	20.98	
巴基斯坦	200.663	23.228	
菲律賓	105.341	28.627	
泰國	68.416	30.486	
土耳其	81.086	44.771	
越南	96.357	29.043	

我們來看一下電腦模擬。這些是 PISA 公佈的一些範例。我們來看這個東西到底是不是有價值，跟我們的數學有沒有關聯？

這個是一個例子。題目裡就是各國使用智慧型手機的數據。這裡就有幾個國家，有 A 欄 B 欄 C 欄，大家可以看人口數對不對？

## PISA數學素養範例試題1：使用智慧型手機 (2)

PISA 2021

**使用智慧型手機**  
問題1/3

根據右邊「使用智慧型手機」的資訊，點選一個選項來回答問題。

B欄和C欄應執行何種運算，才能正確得到D欄的值？

對每一個國家

- 將B欄的值除以C欄的值：  
 $B/C$
- 將B欄與C欄的值之和除以C欄的值：  
 $(B+C)/C$
- 將C欄的值除以B欄的值：  
 $C/B$
- 將B欄的值除以B欄與C欄的值之和：  
 $B/(B+C)$

**使用智慧型手機**

試算表中顯示的是部分亞洲國家的人口數（單位：百萬人），及其使用智慧型手機的人數（單位：百萬人）。這些數據是按國家的英文名稱順序排列。

A欄	B欄	C欄	D欄
國家	人口數 (百萬人)	使用智慧型手機的人數 (百萬人)	使用智慧型手機的人數 比例
孟加拉	166.735	8.921	
印尼	266.357	67.57	
日本	125.738	65.282	
馬來西亞	31.571	20.98	
巴基斯坦	200.663	23.228	
菲律賓	105.341	28.627	
泰國	68.416	30.486	
土耳其	81.086	44.771	
越南	96.357	29.043	

第一個題目問：如果我們要看每一個國家的比例，該怎麼做？如果我們的學生有操作 Excel 的經驗，應該更容易看得懂。即使沒有 Excel 經驗，因為試題提供的工具都是可操作的，所以他可以試試看。這對我們的學生來講，並不是難事，對不對？所以我們就是把 C 除以 B。

## PISA數學素養範例試題1：使用智慧型手機 (3)

PISA 2021

**使用智慧型手機**  
問題2/3

你可以點選每一欄最上方的分類按鈕來排序數據，數據將會以遞增順序排列。

使用分類按鈕來幫助你評估每一個敘述。

針對以下每個敘述，點選**正確**或**錯誤**。

敘述	正確	錯誤
人口數最多的國家使用智慧型手機的人數也最多。	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
使用智慧型手機的人數最少之國家人口數也最少。	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
使用智慧型手機的人數比例最高之國家擁有最少的人口數。	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
使用智慧型手機的人數比例居中之國家也是使用手機的人數居中之國家。	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>

**使用智慧型手機**

使用智慧型手機的人數比例資料已匯入試算表的D欄中（以百分比方式呈現。）

A欄	B欄	C欄	D欄
國家	人口數 (百萬人)	使用智慧型手機的人數 (百萬人)	使用智慧型手機的人數 比例
孟加拉	166.735	8.921	5%
印尼	266.357	67.57	25%
日本	125.738	65.282	52%
馬來西亞	31.571	20.98	66%
巴基斯坦	200.663	23.228	12%
菲律賓	105.341	28.627	27%
泰國	68.416	30.486	45%
土耳其	81.086	44.771	55%
越南	96.357	29.043	30%

第二道題就問你一個現象。題幹給一個敘述：例如使用智慧型手機的人數比例居中之國家，使用手機的人數也居中，要學生判斷正確還是錯誤？如果是

紙筆的題目學生可能需要花一點功夫，因為直接看可能是沒有辦法記這麼多的資料，但在這個題目中，你只需要讓電腦將 D 欄由小到大排列，一眼就可以看出居中的是哪個國家，再用觀察、判斷就可得到答案，學生所需只是做出如何排序資料的決策及後續數值比較大小的判斷。

## PISA數學素養範例試題1：使用智慧型手機 (4)

**使用智慧型手機**  
問題3/3

你可以透過點選相對應的標籤，將橫軸的變數轉換為各國的人口數（單位：百萬人）或是最低時薪（單位：西德蘭元）。

透過點選相對應的標籤來觀察不同的圖形並回答問題。

當下列哪一個變數（人口數或最低時薪）增加時，該國使用智慧型手機的人數比例也隨之增加？

人口數

最低時薪（西德蘭元）

解釋你的理由

**使用智慧型手機**

下圖顯示依據各國人口數（百萬人）和最低時薪（元）所對應之使用智慧型手機的人數比例。

人口數 時薪

國家	人口數 (百萬人)	使用智慧型手機的人數 (%)
馬來西亞	~100	~55
土耳其	~50	~55
泰國	~70	~45
日本	~130	~50
越南	~100	~30
菲律賓	~100	~25
印尼	~250	~25
孟加拉	~150	~10
巴基斯坦	~200	~15

最後提供兩幅散佈圖，問哪一個變數——人口數或最低時薪——增加，能使該國使用智慧型手機的人數比例也隨之增加？重點是還要解釋你的理由。這就是一個用數學去看到現象，然後詮釋現象（做數學溝通）的題目範例。

再來是個模擬存款本利和的問題，我們都很熟悉。

## PISA數學素養範例試題2：存款模擬 (1)

**存款模擬**  
簡介

先閱讀簡介，然後點選「下一頁」的箭號。

**存款模擬**

小萱和她的父母討論最佳的存錢方法，以支付她上大學時的開銷。他們在網路上發現了一個模擬儲蓄的應用程式，該程式可以讓他們嘗試不同的方法來得到他們想要的結果。

此模擬程式有4個變數：

1. 每月存款：這個家庭每個月存入帳戶的金額。
2. 存款期長：這個家庭有存錢到帳戶的總月份數。
3. 年利率：該存款帳戶提供的年利率。
4. 本利和：在存款期結束後帳戶所存的總金額。

該應用程式允許使用者執行三種模擬：

- 本利和：給定每月存款、年利率及存款期長，可計算最終累積的本利和。
- 每月存款：給定存款期長、年利率及最終想得回的本利和，可計算每月所需存款金額。
- 存款期長：給定每月存款、年利率及最終想得回的本利和，可計算所需的存款期長。

考試介面提供的電腦模擬工具，讓學生可以調整存款期限，會跑出一些結果，然後回答的一些問題。譬如說，如果每月存多少，或者你想要存到的目標，讓你去做一些實驗，然後下結論。

這也是有推理的活動，針對每一種模擬，選擇兩個敘述來說明該模擬的使用時機，你什麼時候需要什麼？或你要填入些什麼？像這種東西實際上都是電腦模擬，學生要去思考、判斷結果。這就是有邏輯的成分在內，但是這種推理邏輯，不是純粹證明的方式，而是根據情境去發展。

## PISA數學素養範例試題4：黏貼磁磚(1)

The screenshot shows a PISA 2021 interface for a math problem titled "黏貼磁磚" (Tiling Tiles). On the left, there is a sidebar with a "黏貼磁磚" section and a "簡介" (Introduction) button. The main content area contains the following text:

黏貼磁磚

一個貼磚師傅要黏貼地板的磁磚，他有兩種不同的磁磚可使用，磁磚A及磁磚B。

磁磚A: A square tile with a diagonal line from the top-left to the bottom-right.

磁磚B: A square tile with a cross shape in the center.

僅使用磁磚A會拼成如下圖左方的樣子，而僅使用磁磚B會拼成如下圖右方的樣子。

Below the text are two 5x5 grid patterns. The left pattern is formed by alternating tiles A and B in a checkerboard-like fashion. The right pattern is formed by alternating tiles A and B in a different checkerboard-like fashion.

最後看一個增長趨勢的範例。就是類似這樣子的黏貼瓷磚，我們可以看到題目要你用什麼規律一直排下去，這個是「樣式」問題。其實我們課綱也有提到樣式，也有等差、等比數列，可是我們課本裡的模式比較單一，也常常會出那種傳統上會有的題型。像 PISA 這裡就會說：如果  $m$  加  $n$  是奇數啊，就使用瓷磚 A，否則就使用瓷磚 B，像這種邏輯性的敘述跟思考，然後搭配上等差或等比的增長模式。

前面舉出一些「大」、「中」的思考方向，有哪些東西是我們在新課剛變革時候可以思考。至於比較「細」的討論議題，可以從國外的課程內容，思考我國的教學內容。

## 國高中題材並非各國教學內容

- 複數(可否不教或真正變成選修?)
- 微積分(可否不教或大量減少內容?可否真的改為選修·聯招不考?)
- 數學歸納法(為何高中生都要學?為何不可留到離散數學再教?)
- 平面幾何證明(可否弱化為性質的發現或範例說明而不作為學習的主體?)
- 尺規作圖可否不教?或僅作為探索工具不考?
- 因式分解可否限定可要求學生筆算的方法(例如排除變數變換法),其他使用工具即可?(有些國家甚至也不教十字交乘法)

我以前在國外教「普通數學」——就是師資培育的數學課——的時候，就有嚇到，他們國高中學的東西跟我們差別那麼那麼大！原來他們沒有學過尺規作圖。然後我在做國際師資培育評比的時候也嚇一跳，有些國家甚至也不教十字交乘法。在選題目的時候，我說你這題就是 *trivial*，為什麼要出這個題目？然後實際上，這題答對率超低的，因為他們無法看出十字交乘的分解。

我想要強調的是，我們的中學（國高中）教學內容，如果並非各國教學內容的，可不可以考慮一下，到底他們的地位在哪？例如複數，尤其是數乙教複數幹嘛？就算他未來要用到某些，也不需要到高中學。其實有的國家根本不教複數。當然我們要教，是因為我們的課程在後面還有很多內容，所以目前不可能不教，但是可不可以真正讓它變成選修，包括就可能大考不考。<sup>1</sup>

這種課程才叫「因材施教」施教吧，你因為真正需要而學，我們臺灣基本上也沒有什麼性向的科目讓你去測試。我女兒以前在加拿大或在美國都經歷過，學校會安排一大堆的性向課，讓他們可以學、去體驗，看你自己的性向在哪裡。我女兒本來說她不要去碰電腦，結果修了一堂電腦課以後，卻發現她自己喜歡電腦，感覺簡單而輕鬆。在高中有需要強迫所有人學習複數、微積分嗎？可否不教或大量減少內容？可否真的改為選修？

數學歸納法，數學家超喜歡，但是我也常常困惑：這麼一個封閉的東西，我們在高中階段能夠做的就是那幾個證明。就算不用數學歸納法去證一遍，那個公

---

<sup>1</sup> 單注：其實先把複數移到高三，它就沒有後續內容了，下一步就比較容易刪除它。不敢在 108 課綱直接刪除它的理由，是避免激怒在職教師；凡是改革一定會激怒某些人，為了讓改革能夠執行，必須謹慎維持「內爆」的壓力在「臨界值」之內，如果炸鍋了，就一切白費。

式早就被數學家發明了，公式就擺在那裡，又不是我們自己想出來的。我學這方法用在何處？它又不能幫助學生想出那些公式來。當然我不是說數學歸納法沒有用，而是說為什麼所有高中生都要在那個時間點學？

就是很多東西都不知道為什麼要學？學生有需要嗎？平面幾何的證明也是一樣的。國中那些平面幾何證明，很多國家是完全不教的。我們可以把它弱化成性質的發現、範例，不要把證明當成是學習的主體。推理當成主體我覺得是很棒的，可是這種證明往往都是數學家耗費很大精力發明以後，我們再來說「數學家是這樣思考的」，其實是學習把它背起來。我以前做過一個證明的研究，很多資優生非常討厭證明，他們都覺得說為證明而證明，不是真的由自己發現什麼，而是你明明知道它是真的還要去證他。這真的是一個大問題。

尺規作圖可不可以不教？我們的傳統是都教，但是也有很多國家是不教尺規作圖的。然後因式分解，我們是不是可以限定到未來學習所需的範圍？我們的課綱，到底要寫成什麼樣？限定的範圍要不要落實在教科書裡？我這一次擔任審查工作時也很困惑。如果課綱有明確寫出限定，其實在審查委員來講，他就有一個比較好遵循的規則。但是如果沒有寫限定，到底教科書可以發展到什麼地步，很難用所謂「素養」精神去辯論。你跟主編說這個不符合課綱精神，他們就反問為什麼不符合？導致比較大的爭議。

有一些我們的現場教師傳統上比較擅長無限延伸的事情，課綱是不是可以做一些恰當的規範？這也是我覺得在做課綱的討論的時候可以思考的。

## 幾何

平面與立體空間題材的安排：

- (1) 立體空間感重要嗎？立體空間推理需涵蓋甚麼？
- (2) 平面推理應涵蓋甚麼？
  - 平面幾何推理的引入混亂不堪；直觀操作、邏輯推理、尺規作圖的關係與順序該如何釐清？
  - 展開圖是以實用為主還是以可命題為主？
  - 平移、旋轉、鏡射是否應該有一系列的課程？例如：操作中認識旋轉，旋轉物件的簡易作圖等等應在課程中涵蓋？高中平移、旋轉、鏡射內容發展快速，向量變換鋪陳時程過短。

現在 108 課綱也算是挺重視立體空間，那到底我們應該要涵蓋哪些空間推理？其實有很多立體空間概念可能用電腦更方便教學，可是我們現在的環境，電腦在課堂中還是用得很少，那我們會不會其實根本就不是教什麼空間感、空間推

理，恐怕都是一種記憶式的學習。

然後平面推理（平面幾何）在國中階段非常混亂，到底是直觀操作、邏輯推理，還是尺規作圖，他們的關係按順序如何？然後展開圖我個人覺得以目前來講，一定是非常重要的對不對？尤其是科技時代，但是我們好像還是以命題為編排教材的主要內容。然後平移旋轉跟鏡射也是一個很奇怪的東西，到底它在哪裡？它好像在又好像不在。它真的在，你會看到它忽然就出現在高中。學生的學習其實很重要，如果真的要講究，就是要慢慢發展，要不然就沒辦法學習，就是變成一個壓力，然後只是討厭，根本看不到它的美，也沒有辦法好好的把它學起來；特別又在沒有科技工具輔助學習的情況下。這種學習有時候就是不斷的增加壓力而已，就是去記憶那些向量公式。

### 步驟(函數、數列)重複的推理思考

- 數學歸納法是確認對錯，是證明不具發展性的證明。
- Subroutine的觀念，是函數的觀念，也是遞迴的想法，去除符號，是否就是數學上的一種思考？用excel呢？從有用的角度來看，例如：從1加到100(將輸出視為輸入)。遞迴方法的思考、應用、範例、工具應否強化？國中開始學習，以發展性為主的可行性如何？絕大多數內容都應從可應用面來想，知識面留給大學以上需要進行研究的人員。[\(舉例\)](#)

我們對於課程能不能有別的、另一種思考方法？就是不完全從數學的哪一個單元、哪一條公式的思路去想，而是從數學推理的角度去思考我們的教材。譬如說 subroutine 就是一個函數或者甚至遞迴數列的想法。如果我們去除那個數學符號，它其實就是一種思考。這個東西在 Excel 上也是可以呈現的，那整個思想是可以在不同場合中實現的東西，跟我們數學又是息息相關的。

如果從實際應用的角度來看，舉例來說，Fibonacci 數列是一個很好的例子，就是我們要算出 Fibonacci 數列的第幾項。我們其實可以用 Excel，或者有的人可以寫程式。這個遞迴的思考方法，乃至於定義函數的方法，都可以變成使用工具的應用範例，我覺得這些都是蠻重要的。

如果我們只是把這些內容當成純粹的數學內容去教，它們的實用性就會降低。到底這些內容的實際應用性怎樣能夠出現？剛剛我們看到一個 PISA 的幾何 pattern 題目，黏貼磁磚那個題目，它應該是從整個平面鋪散出去，而不直接是一

個數列；當我們想到數列的時候，就必定會好像橫排一排這樣子，不能想到那個更擴散的一些 pattern 的發展。所以像我們會考的結果，就發現只要不是幾何題型，只要出現類似 pattern 的題目或是有表格的，幾乎都有學生會用等差數列的公式，即使完全不是等差數列，他們還是要用等差數列公式，因為他們學到的東西當中最有感覺的就是等差數列，有些人完全對不上照樣在那邊找等差關係。我覺得真是太厲害了，你為什麼可以在這裡找到等差數列？

我們是否能有更多發展性的思考？並且序列不一定要限制在一維的情況。所以我認為我們可以將大部分內容從應用的角度來思考，純粹的知識面可以留給大學以上的研究人員。

## 數學內容思考示例：遞迴與迭代運算

迭代、遞迴演算都是一種遞迴數列或函數的觀念：

◆ 任務：從1加到100

```
程式：oput = 0 (迭代)  
    for i in range (1, 100):  
        temp = oput + i  
        oput = temp
```

```
程式：def Oput(i) : (遞迴)  
    if i == 0:  
        return 0  
    return Oput(i-1)+i
```

數學：令  $a_0 = 0$ ,  $a_n = a_{n-1} + n$ , 以  $n = 1$  開始執行到 100。

可否用函數表達？迭代中有甚麼數學思想？

 返回

舉個例子，剛才提到的例子，其實我不確定我寫的是否正確，因為我以前主要學的是 Fortran、Pascal、Basic 等，沒有學過 Python。如果我們用迭代的想法，從 1 加到 100，通常我們會讓  $i$  從 1 走到 100，然後設一個臨時的變量來替換。這是一個迭代的想法。而如果從函數的角度來看，我們可以寫成一個函數。這實際上就是遞迴：Oput(100) 從 100 開始執行到 0。我們可以用函數表示遞迴數列。

## 課網格式

能力指標？還是內容指標？

教科書審查者的工具



最後再回到課綱格式。我認為現在的核心素養相對於九年一貫的能力指標是相容的，但是能力指標可能流於只關心你是否完成了特定的小項目標，而不在乎你的整體素養。現在課綱的「表現」目標其實還是內容指標，只是加一個「能」字而已，換湯不換藥。這導致有些教科書根本不管表現指標，也就更顧不著整體素養，只要把一項一項的內容指標完成了就好。因此，有時候審查者只能關注內容指標，表現指標沒有發揮效用。

為什麼我要提課綱的格式呢？我覺得這是一個新的變革，我們可以去思考。社會變化很多，我們的課綱應該如何變革呢？又因為它目前還是教科書審查的工具以及根據，所以我們必須要思考一下。我想再用 NASA 的數學題目舉例說明能力指標或其寫法可思考的變革。

## NASA天文數學題



太陽能可能是一件好事，但即使數百萬年的微小變化也會導致嚴重的氣候變遷，增加1%的太陽能足以使地球平均溫度提高攝氏10度。導致數十億年後地球上生命的結束。

自地球45億年前形成以來，我們的太陽光隨著時間的推移逐漸增加其亮度，並將在未來數十億年繼續如此。這將對地球上的生命延續有重大影響。太陽經過時間 $T$ 在地球上的輸出功率 $P$ 為：

$$P(T) = 1357 + 90T$$

其中 $T$ 是從當今算起的時間，單位為十億年，而 $P(T)$ 是地球表面上每平方公尺太陽能的量，以瓦為單位。

題幹如上。

## NASA天文數學題

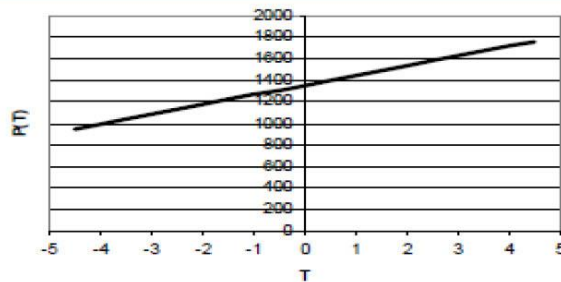
問題一：畫出函數 $P(T)$ 在定義域  $[-4.5, +4.5]$  的圖形。這個時間的定義域，從自然界來詮釋，其意思為何？

問題是畫出函數  $P(T)$  在定義域的圖形，以及從自然界解釋其意義。這個「定義域」可能不需要太早講，名稱也許可以不提，但在生活中「範圍」卻是很自然的。某些事物幾乎難以畫出。數學中的無窮也是如此，所以範圍是很重要的，尤其在生活中。解答是從自然界來詮釋，所以詮釋的合理性要看你的答案如何。有時老師會想著標準答案是什麼，這樣是否難以批改？

## NASA天文數學題

問題一：畫出函數 $P(T)$ 在定義域  $[-4.5, +4.5]$ 的圖形。這個時間的定義域，從自然界來詮釋，其意思為何？

答：此範圍橫跨從45億年前到45億年後。



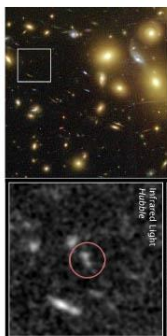
這個圖如何？  
你認同嗎？

這樣的問題課綱可否寫出能力指標？

然後看這個圖，你能接受嗎？對於數學的人來說，有些人可能接受不了這麼一般化的樣子，但整體上還是可以接受的。沒有下面兩個象限，你可不可以接受沒有箭頭，可以接受嗎？其實生活中就是這樣，包括我們在畫統計圖形，坐標圖不像坐標圖，也是一樣的。所以在應用上一定要那個格式嗎？我發現很多國家不用箭頭，也沒有規定你一定要標出什麼，當然單位通常會要標，因為你要畫出來，要知道你的單位是不是對的。

我在想的是這樣的問題，我們課綱能不能夠寫出這樣的能力指標，例如詮釋這些東西，在某些單元中可能會有一些能力指標的出現。

## NASA天文數學題



- 2008年哈伯、斯皮策太空望遠鏡偵測到一個距離我們銀河系最遠的銀河系。光需要12.9十億年到達地球，真實的距離乃以下列公式估計：  
( $D$ 的單位是十億光年， $z$ 為紅移量)

$$D(z) = \frac{877}{(1+z)} \left( \frac{z}{8} + \frac{7}{8} - \frac{7}{8} \sqrt{\frac{z}{4} + 1} \right)$$

問題2：上圖是2008年偵測到的最遠銀河系，稱為A1689-zD1。從哈伯望遠鏡測得其紅移為 $z = 7.6$ 。試問此銀河系離地球多少十億光年？

再來看這個問題，NASA 天文數學題是他們搭配學生的年級寫的，這是高中的，我忘了是幾年級的。在我們來講，好像看起來就很複雜啊，但是它到底會不會很複雜？

## NASA天文數學題

Answer:

$$\begin{aligned}D(7.6) &= 877 [7.6/8 + 7/8 - 7/8(7.6/4 + 1)^{1/2}]/(1+7.6) \\ &= 877 [0.95 + 0.875 - 0.875(1.70)]/8.6 \\ &= 877 (0.335)/8.6 \\ &= 34.2 \text{ billion light years.}\end{aligned}$$

天文結果沒有根號存在的空間。

$$D(z) = \frac{877}{(1+z)} \left( \frac{z}{8} + \frac{7}{8} - \frac{7}{8} \sqrt{\frac{z}{4} + 1} \right)$$

計算機使得國中、高中、大學、未來在職場的數學式子變得不可怕！

**這樣的問題課綱可否寫出能力指標？**

實際上我們看這問題，2008 年偵測到最遠的銀河星稱為這個，紅移  $z$  等於 7.6。這跟國中會考類似：常常出現一個公式，告訴你它是什麼，然後問你些問題。這個是問你說多少 10 億光年，然後我們可以看到這個東西在他們在做出來以後一定會寫成小數。因為在天文結果裡面是沒有根號存在的。

我在 Common Core 幫忙做課綱時，旁邊來自 Berkeley 的教授正在幫 NASA 培訓高中生數學，他就說他們不會要那些根號，分數也是沒有用的，對他們來說不可能有用，全都要換成近似小數（科學記號）。

我們可以看出，像這樣的問題，在我們課程中可能不見得會有，但是真實情境中甚至還有更複雜的公式。但是只要有計算機或者是使用電腦的科技工具，這些就可以輕鬆處理，根本沒什麼可怕的：只要學生知道哪一個先算哪一個後算，完全不用動筆，你就可以按照順序輸入工具。像這樣的問題，我們課綱有沒有辦法寫出能力指標呢？

# 美國州共同數學課程課綱寫法

## Creating Equations\*

A-CED

### Create equations that describe numbers or relationships

1. Create equations and inequalities in one variable and use them to solve problems. *Include equations arising from linear and quadratic functions, and simple rational and exponential functions.*
2. Create equations in two or more variables to represent relationships between quantities; graph equations on coordinate axes with labels and scales.
3. Represent constraints by equations or inequalities, and by systems of equations and/or inequalities, and interpret solutions as viable or non-viable options in a modeling context. *For example, represent inequalities describing nutritional and cost constraints on combinations of different foods.*
4. Rearrange formulas to highlight a quantity of interest, using the same reasoning as in solving equations. *For example, rearrange Ohm's law  $V = IR$  to highlight resistance  $R$ .*

這是當時我們在做美國共同數學課程時的一個寫法。這是他們高中數學的寫法，我隨便舉例，他就建立方程式是怎麼樣的：Represent constraints by equations or inequalities and by systems of equations and/or inequalities, and interpret 或者要去 interpret the solutions as viable or non-viable options in a model in context. For example, represent inequalities describing nutritional and cost constraints on combinations of different foods。

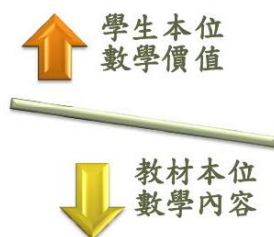
所以像這樣的課綱寫法就是會強調一些，例如 interpret solutions。如果審書委員看到這個 interpret solutions，就會看教科書有沒有做這一塊啊，你才有辦法去推動教科書達到課綱想要的應用的東西，或者是學生的能力或技能的目標東西，就是思考技能。後面還有例如 rearrange formulas，就是明確告訴你，公式本來是這樣子： $V=IR$ ，但是如果我要以電阻  $R$  為主詞，要怎麼去改寫公式？這也是很重要的，而且這些都是數學思考。

## 數學價值與數學素養

要怎麼教與考，取決於：

重視數學內容 vs 重視數學價值  
立場教材本位 vs 立場學生本位

提升數學素養做法：



我今天提到的數學課綱的雜想，基本上就是學生本位跟數學價值本位多一點，然後教材本位跟數學內容本位少一點，可能比較能夠適應我們未來在全國學生學習的情境。這不是講到那個真正的選修，真正的選修當然有不同，就是學生因為想要做什麼，他有他的興趣愛好需求去修的那個選修，我覺得是完全另外一件事。但是從全國學生的課程安排上，我個人是覺得學生本位跟數學價值本位多一點，然後教材本位跟數學內容本位少一點，這是很重要的。

## 會後對談

單：第一個問題是，當初在民國 82 年，謝老師您設計了國中數學的分軌。這件事情我耳聞過，而且我也跟很多人談過。我所碰到的教育界人士——不是數學教育，就是教育——通通反對國中分軌。您剛剛提到，當初反對你這麼做的是行政端，因為行政的麻煩。但您自己評估，有多少是來自教育學術界主流意見呢？這麼說好了，教育主流意見當中對於「公平」的一種意識形態。

謝：其實應該這樣講，我剛剛講的意思是，我回國的時候是民國 81 年，所以那個課綱是本來就定好要分軌，不是我定的。而是我們當時因為使用統編本的教科書，確實編了那個選修的數學。當時我參與的是要釐清必修和選修的內容，不是我去定分軌的；我回國之前，他們早就定好了。

單：我想問的重點是，您評估在我們現在教育裡面，我感覺有一個主流意見就是要公平（當然我的感覺可能錯了），而這個公平是一種齊頭的公平。所以在這個意識之下，阻擋了我們做任何的分流或分軌，我這樣說對不對？

謝：為什麼臺灣接受資優教育？我的意思就是說，如果可以接受資優教育，我們就可以去想說，我們就是有那 Honor 的課程。我一直覺得現在的學生很可憐，如果今天有一個 Honor 的課程，我是 Honor 就去修這個高級的課程，那是「特殊」的課程，其他的人修的內容比較簡單，但那是「正常」的。我修簡單是我正常啊！這個感覺非常重要，而不是我修簡單是我笨。現在不是這樣，現在是我修「正常的」其實就已經是「高級的」，所以很多學生就已經根本不會，許多領域也覺得不需要。現在必修的數學學生都得修，就好像大家都應該要達到那個水準，然後我達不到，反而是我不正常。但是如果我們把「正常」和「高級」真的區分開來，有需要高級數學的人是 Honor，其他人只要修課綱委員可能認為簡單的水準，就是正常水準的了。其實我覺得這才叫做公平，因為每一個人數學程度、性向不一樣，在他的基礎上把他推上去，對他才是公平啊。假設我今天說大學聯考考體育鉛球，我一定不能當大學教授的啦，我鉛球從來沒有及格過，每次丟下就在腳底下，差點砸到自己腳。老師要我補考，我都不願意去補考，因為知道我根本不可能丟出及格的距離。我早產、個子矮、體重輕、力氣小，所以這難道是公平嗎？我覺得這叫做霸凌吧。同樣的，有些學生數學學不來，卻因為學數學受到人生莫大的挫折，產生強大小自卑感，這就叫霸凌。

單：我先跳過這個問題吧。我覺得這真的是很難，就像我們在高二分數了數 A 跟數 B，很多學校根本不開數學 B。他們就認為你學了數學 A，自然就會數學 B 了。

謝：我心裡的想法是真正的選修，不是全部學生都要或者修數 A 或者修數 B，而如果學了數 A，數 B 就跟著會了，這就表示課綱制定不當，或者教科書審查不當，我的想法是，一個選修我去選，就是我未來想要走的方向。選修當然不會影響我那個比較簡單的數學，對簡單的數學可能有幫助，但是這不用其他人陪著我念。學校不能逼學生去選真正的選修，這才是合理的系統。

單：第二個問題。如果真的有這樣的選修，您想像的考試制度就是不考選修科，純粹看學校的（選修課）成績嗎？在臺灣，特別是高中課程，應該不可能迴避這個問題。就是這個課程開出來，對升大學有什麼影響呢？學生修了，他拿著這份資料怎麼應對大學的考試呢？

謝：你看，本來教育部是有一個規畫，就是你可以選多少科目，就是幾選幾科嗎？是不是其實就是這種觀念呢？如果他今天是申請的話，那些科目對他可能有幫助，他的資料就要看。假設我們有真正的選修，當然就要看。舉例來說，臺大可能會看重微積分，如果你修了這門課，理工科的分數可能就會大加分，因為這對他們很重要。如果大學都不會因為微積分選修加分，就表示人家真

的覺得你在高中學的微積分不重要，你就要承認這個是不重要的。要不然就像今天我說的，根本有那麼多的學群覺得他們不需要數學，那就不是我們自己在自嗨而已？

單：最後一個問題。您提到高中可以減少或不教微積分。可是另一方面，您又提到函數是一個非常重要的核心概念。後來我從您的演講也聽到，你對函數至少有兩種不同的概念傾向。一個是類比於程式語言的 **subroutine**，這個我懂。如果是類比於 **subroutine**，確實跟變化率就沒有關係。但另外一種概念傾向當然就是  $x$  跟  $y$  兩個量之間的變化關係。如果在第二種概念之下，如果我們不把變化關係拿進來，沒有微分，簡單說，這第二類的函數在數學教育的內容上，想象起來是沒有東西的，除了圖形以外是沒有東西的。

謝：它就是一種思考。未來在大學時，有需要的時候，這種思考自然會幫助他。

例如，看經濟學的教科書，臺大使用了很多函數的觀念，但和高中的教學不同，省略了一些不必要的部分，但仍然保留了總量和變化的關係。經濟學的應用中，函數符號的使用方式和數學中有所不同，這是思想上的靈活度。課程擁擠，證明的部分讓人感到困擾，對於有興趣的學生，附錄可能是一個好選擇。老師和學生可以根據需求選擇是否進行附錄教學，不需要的話就避免了這一部分的學習，這樣的設計更貼合現實需求。

函數的教學主要是思想。看各領域使用函數概念時，符號的差異非常大，跟數學的標準符號差異很大，主要要有思想的靈活度，目前的課程中就沒有。

單：我在選擇課綱內容的時候常被挑戰：現在看不到用處不代表以後沒有啊。你敢「保證」這個數學以後「永遠」沒有應用嗎？

謝：但是現在已經知道有用的，不是應該先教嗎？現在就有用的、現在就需要的，都發展不出來了，還談什麼未來可能有用的？

吳（昭容）：今年被劉柏宏召集人要求進行一項調查，即臺灣職場的數學需求調查。回顧了一些文獻後，發現即使在國外，使用人類學的方法觀察職業，如電工在工作場境中使用的數學。透過問卷調查，發現這些職場的人主觀上認為自己沒有使用到數學。研究者分析指出，大部分的工作都被科技取代。例如，電工在維修電路時使用電錶測量數值，填入表格，而這樣的工作並不需要深入的數學知識。

因此，後續計畫是尋找不同職業，調查他們在工作場景中是否使用數學。提出了三種問法，一是問及在機器當機時是否使用特定數學知識解決問題，另一是詢問在帶新人時，他們認為擁有哪些知識可以更好地進行指導。第三個問法是根據工作理念，例如在與老闆、跨部門或客戶的溝通中，需要使用

什麼樣的知識，以便更有效地轉化並說服對方。

這樣的問法可能更有助於觀察他們對數學實際需求的看法，尤其在非常規的情境中，自動化的程式無法滿足問題解決的需求。問題是，我們在數學課室裡，像是國中或高中的那類地方，是否應該更加強調帶出這種思維。除了學習具體的數學知識外，我們也應該培養一些互相說服的能力。

單：建議不要提第一種情境，很贊成第二種情境的提問。

我想分享一下在美國留學期間，每個月我都讀一些美國應用與工業技術學數學學會（SIAM News）的文章。其中有一篇我至今仍記得，提到越是核心且重要的數學，就越容易被科技工具包裹，使它不見了，一般人看不到那樣的數學。這讓我深思，即便我們處於最重要的地方，但因其重要性而迅速被科技所取代，使許多人認為不需要學習這門學科。就像謝老師一開始說的，18 學群當中很多學群都覺得不需要數學。

吳：所以最後的結果就是很多人都認為不需要學這麼多數學，因為都有科技工具提供服務。

單：對。那位作者說，這是數學家「百口莫辯」的地方。

林：我覺得謝老師提到了一個觀念，即數學的情意面。老師剛才談到了一些數學應用，例如建築等，但也提到了很多情意方面的內容，儘管沒有直接使用情意面這個詞。我認為，如果要提出修改課綱的建議，或許應該要求老師在教學中更多地談論數學的情意面。在前面單老師談到了學習數學的目的，以及為什麼要學這個學科。我舉例來說，老師有一支影片很有趣，他解釋了弧度和度的概念，以及為什麼要使用弧度。這種深入的解釋對我來說非常有意義。如果我們考慮到新的人工智能可能取代我們的情境，我想指出，未來的數學教育者可能不再需要進行傳統的證明和計算，而是成為開創者和創造者。就像 Steve Jobs 一樣，他並不是製造手機或寫程式的專家，但是他作為 CEO 卻是最強的。因此，我們可能需要更多地花時間談論數學的應用價值，尤其是在物理學科和其他領域。這樣的情意面談論可能會更有吸引力，而推導和證明的部分可能會相應減少。這或許是一個未來值得探索的方向。

另外，我稍微提一下反駁的觀點。我認同老師說證明不重要，應該降低難度，改成要學生能讀懂證明即可。難度可以降低，不必要給予過難的題目，而是強調邏輯性和思考。例如，要求學生讀懂簡單的證明，像是 two-column proof，強調邏輯思維，而不是給予過於複雜的題目。這有助於培養學生的思考能力。

另外，我稍微提及老師對數學歸納法的看法。老師認為這在應用上有些偏頗，但我認為，閱讀數學歸納法不僅是為了應用，更是為了欣賞其基本原



理。數學歸納法的建立就是如何將事物有條理地排列，就像是一堆積木，只需給予兩道指令，就能將它們全部推倒。這兩道指令分別是前倒後要跟著倒，以及確保第一個積木被推倒。數學歸納法的證明就是這兩個主要步驟，首先驗證  $n$  等於一或  $n$  等於  $k$  的時候成立，再藉由這個基本原理去欣賞其邏輯。因此，我認為數學歸納法不僅是一種應用，更是一種欣賞邏輯的方式。同時，不必給予過於難的題目，讓學生能透過觀察法，並培養對數學的欣賞。

謝：我沒有用「情意」但是講「意圖」。如果學生有「意圖」，什麼事都好解決。我也同意數學歸納法的思想是很漂亮的，師大的學生也發展了許多數學歸納法的教學活動，希望它活潑有趣，但是重點是後面跟著出來的一堆難題，還有考試需求，導致教學現場的困難和學生過度的負擔。為了「閱讀證明」的目的，我同意放在附錄，老師可以帶學生閱讀，但不必強迫全國學生。有些學生根本跟數學沒關，無法欣賞數學。重點是，學習數學歸納法是對學生有傷害，還是有幫助？

鄭：謝老師提到的內容需要進行改革，我對此表示贊成。這種改革不僅僅是客觀層面上的調整，也可能涉及到社會層面，這一點值得關注。舉例而言，謝老師提到了關於證明和尺規作圖的部分，這些在修數學課綱時可能受到重視。當時我在國中分組，召集人張海潮老師對這些內容有一些意見，但他也明確表示，如果有數學家敢將數學證明或幾何證明、尺規作圖拿掉，他根本無法進入中華民國數學學會的大門。這也表明了這些內容的重要性，需要與其他團體做好溝通，以確保改革的順利進行。

另一方面，關於數學歸納法的部分，我認為在課程內容的調整中，應該考慮不同學科的需求。例如，我們曾就數學歸納法的位置進行聯席會議，並與科技領域的人討論。科技領域的需求使得數學歸納法放在高一，以確保學生在高中階段已經熟練掌握這一方法。這顯示了調整課程內容時，需要考慮不同領域的需求，以確保學生在學習過程中能夠應用所學。

最後，我認為許多改革可能需要進行漸進式的調整，而不是過於急促。這樣更容易取得成功。同時，我也提到了改革可能會面臨到在場老師的接受度問題。有些改革可能需要更多的時間和溝通，以確保教育體制的順利運作。

謝：我應該要去另一場會議了。

單：謝謝謝老師擱置另一個會議，先來我們這裡分享。今天先到這裡。

單：我想回應一下勇吉老師提到的兩個事情，也與章華老師所提的有關。首先，是情意面的部分。對於在情意面上進行教學，我想要回應兩點。首先，要求老師在課堂上融入情意面，類似於國文的課綱，要求國文老師在課程中「講

故事」。但大家發現，講故事是老師最不擅長的，也是最難做到的。老師可以輕鬆應對數學計算和證明，但叫他們講故事、傳達情感，這是一個非常困難的要求。這也與章華所提到的社會阻力有關，以及數學學科中心常常說的「教育 20 萬名數學老師」的難題，要怎麼教育 20 萬名數學老師去提升「情意面」？

再來說一下「情意」跟謝老師說的「意圖」有差異。其實我個人在「前導研究」提出「知行識」時，就有人說「識」骨子裡就是情意。但我當時就跟同仁商量不要用「情意」，因為情它連結到其他地方去。當時討論的時候，「識」其實真的像情意或者態度，但是剛剛謝老師說的「意圖」是更貼近「識」的，就是「識」是希望把意圖說清楚。

像勇吉老師剛剛舉例說的為什麼要從  $\text{degree}$  換成  $\text{radian}$ ，有一個意圖在那個地方。如果要把它當做情意，我也不反對的，可是我們說「識」就希望把「情意」換個名字，希望跟「情緒」跟「感情」切開來。因為講情意就很難切斷情緒。我們講意圖，很多人懂了意圖以後，心情比較好，他可能變得比較願意學，那可能就會歸於情意了。可是在設計課程的時候，不是著重在提升情意，而是著重在把「知行識」的「識」面向交代清楚。這是我可以解釋一下當初提出「知行識」而沒有說情意或者態度的原因。

吳：您剛說要求數學老師講故事很難，那如果要求老師提升學生的意圖可能嗎？

單：「識」可以寫成教學目標，可以有內容。例如寫出課程的時候，可以要求除了教  $\text{radian}$  以外，還要說明  $\text{radian}$  在什麼情況下比  $\text{degree}$  更有用，有什麼方便之處。然而 108 課綱也沒有寫出來，我個人認為最主要的原因是我們沒有足夠的時間去撰寫。

在整個演講中，謝老師提到的「課綱格式」的觀點，很近似周老師在第一次演講時提出的「學習表現」的概念，大家都覺得在課綱中寫得更精確一點是有必要的；周老師也指出，我們在數學領域的學習表現部分實際上只是將內容加入一個表達的形式。這是因為我們沒有足夠的時間去深入思考，而是將內容搬移到表現的項目中，再進行一些修辭上的改動。

如果有更多的時間，我們確實可以更仔細地思考學習表現的內容，使每一個教學內容都能清楚地表達學生應該知道什麼、應該能做什麼。此外，我們也可以更明確地講解為什麼要這樣做，以及這樣做後的實際用處。這需要更多的時間，讓我們把這第三個層面說得更清楚。

最後提到課程架構，前導研究提出「知行識」作為課程架構，我們希望它是實際可行的。具體來說，課程架構要能夠讓人用來編寫課本和教材，而不僅僅是一個高層次的理念。我們希望這個架構可以分為三個維度，即知、行、識。簡單來說，知是指學生要背起來的內容，行是指他們會應用數學來解決什麼樣的問題，識是指為什麼要學這些內容，學了以後會有什麼用處。

這個「識」的部分，我認為大約可以視為情意，但不同的地方是它應該可以被具體實現，可以被寫入教學目標和教材中，老師可以清晰地表達。

剛才提到的，後來發現要求國文老師講故事是非常困難的，這是在國文領域發現的。原本人們期望國文老師能夠透過古文或詩詞等方式帶出美感，有些老師成功地提出了一些有用的教學法。然而，後來發現這成功的關鍵是因為那個老師的個人魅力，他特別擅長講故事，這種魅力和教學表現是無法複製的，無法放入文字教材中，也難以傳播到全臺灣。

這樣的現象在國文科已經有所發現，我想在其他領域也是一樣。要求數學老師講故事並吸引學生，這除非我們能夠將這些故事以精彩的文字寫出，讓老師能夠藉此教學。

吉：我有一點想談。學生在國中時，常將數學和理化科學的知識分開看待，雖然兩者實質上有密切關聯。這種切割的看法可能影響學生對知識的整合和理解。這也反映在題目設計上，造成了學科之間的隔閡。我認為這與教學有關。如果課綱一開始將這些科目視為相關的部分，而非完全獨立，學生或許更容易理解並串聯知識。這樣的教學方法可以培養學生的整合思維，使他們在將知識應用時更得心應手。

另一個我想提的點是情感面。許多人可能不喜歡數學，這可能是因為他們被迫學習，而非出於興趣。然而，我們在其他領域，很少會評論自己不擅長的事情，例如音樂，就算我不會彈鋼琴也不會批評鋼琴沒價值。對待學科差異時，我們或許應該更多地用欣賞的角度看待，而不是評價其價值。

單：大家不能僅將數學視為欣賞的領域，主要是因為考試的存在。剛才也提到了真正的選修科目，將來的學習成效評估，特別又要涉及升學的時候，可能確實有困難。

另一方面，如果將必修科目（需要考試的部分）一再縮小，可能導致升學考試難以區分高下，這在社會需要精確評估個人能力的情況下可能帶來災難性的後果，例如補習和作弊現象的增加。此外，如果我們共同必修的內容過於淺薄，私領域的影響就會介入，包括家庭社經地位的差異。這可能導致家長將孩子送到國際學校學習 IB 課程，最終走向出國而不在臺灣升學，而公立教育系統則可能面臨危機。這樣的情況可能讓公共教育變得複雜，甚至類似英國曾經發生的公共教育危機。

大家提到數學能力變弱時，通常指的是計算能力。然而，隨著科技的進步，從計算器到電腦套裝軟體，再到現在的人工智慧，數學的應用方式已經有了極大的變革。這也引發了一些疑慮，即人們是否仍需深入瞭解數學原理，而不僅僅是使用軟體工具。我曾參與職業教育的討論，特別是高職數學難度的問題。一位服裝設計老師分享了她在打板製作時遇到的挑戰，需要理解如何呈現美麗的曲線。雖然現代軟體能夠執行這項任務，但老師強調了手動畫

曲線的經驗的重要性。她的觀點是，了解曲線的重要點和原理，以及手動調整這些點，對使用電腦軟體仍然是必要的。這個例子突顯了數學在實際應用中的重要性，即使是在現代科技工具的背後。了解數學原理，尤其是在特定領域中的應用，仍然是解決問題、調整工具、以及提高效率的關鍵。總的來說，雖然工具的演進改變了數學的應用方式，但對數學原理的理解仍然是具有深遠影響的。

不好意思多耽擱了各位的時間，真的結束吧，謝謝大家。