

# 什麼是「知、行、識」？

單維彰·民國 108 年 1 月 22 日

單維彰（主編）、謝豐瑞、鄭章華、吳汀菱、曾明德（2020）。中學數學教材教法。臺北市：五南。頁 55-58。

「知、行、識」不是另外一套課程目標，也不是素養的另一種詮釋，而是用來設計素養導向之教材與教案的參考架構。

十二年國教總綱的核心素養是一套頗為高明的教育願景，但是不容易實際作為設計教材教法的指引，所以數學課程建議使用「知、行、識」三個構念作為教案設計的參考架構。意思是說，在編撰教材和設計教案的時候，有意識地思考「知、行、識」三方面的教學目標；而在教學時（或教學後），反省是否妥適安排了屬於「知、行、識」的教學活動？如果能夠兼顧這三方面的目標，則比較容易設計出「理想的」數學教學活動，也比較容易達成「素養導向」的願景。

## 一、「知、行、識」的說明

簡單地說，「知、行」就是「知道」和「能做」兩個向度，在教學層面上，知當然是指學習內容，而行是操作技能。可是，雖然「知」是大家熟悉的陳列知識，即「是什麼」的教學，但是「行」則不僅是操作程序的示範，更應該包括「做什麼」的教學。以數學課程而言，就是一個內容主題的典型應用：學習任何一個數學主題，都應該搭配著典型應用，而且越接近學生的經驗範圍越好。

「是什麼」不一定比「做什麼」簡單。例如「正整數是什麼」這個問題，很快就把人帶到數學哲學的深處，一般人可能既不感興趣也沒必要學習。相對而言「正整數做什麼」這個問題反而容易，至少對所有小學生都還算容易，就是用來計算（離散的）物件對象「共有幾個」、「剩餘幾個」或「不夠幾個」。

至於「知、識」顯然是從慣用的複合詞「知識」拆開的兩個更精緻觀念。「知」側重於能夠從記憶中列舉，在認知上能夠指認。「識」的意思則比較微妙，是關於理解和連結的後設認知，以及對其價值的賞識。「識」不容易翻譯成英文，除了對應基本的 *to understand* 以外，還有 *make sense of*（使產生意義）、*be aware of*（意識到）和 *have an insight into*（洞察）的意思。

在教案設計上，對照「知」是「是什麼」和「行」是「做什麼」的教學，「識」則是「為什麼」的教學（不僅是 *why*，而且是 *for what*），包括「為什麼要這樣」、「為什麼是這樣」等問題的教學。透過「為什麼」的教學，在課程中協助學生對學習內容產生意義，並在數學領域內或者跨領域地連結其他學習內容，進而有機會賞識數學的價值。

最近常被引用的一種教學設計主張，稱為重理解的課程設計（*Understanding by Design*，簡記為 *UbD*），它提出的理念與設計法，可以用一個管理學上的觀念扼要地說明，即「以終為始」。其原文 *begin with the end in mind* 之中的 *end*，不僅是「終點」，也有「目的」的意思。此一理念，跟數學教育向來的共同理想是一致的。可見 *UbD* 也有「識」的概念，讓學生明白為什麼要學這個主題？也讓學生認知到數學知識發生的來龍去脈。

## 二、「知、行、識」的舉例

以「負數」主題為例，「知」的向度包括以下教學目標：

- 知道數有分正數與負數（此處的數指非零的實數，但是七年級還不需要強調此細節），知道正數與負數的記號規則。
- 知道負數在數線上的排列規則（假設已經知道零和正數在數線上的排列規則）。
- 知道「同值」的正負數在數線上的位置對稱於原點，而且它們稱為彼此的「相反數」。
- 知道負數加、減一個正數的原理，和小學階段所知的加、減原理相同（沿著數線向上數、向下數）。
- 知道加、減一個負數的原理，例如 $(-2) + (-3) = (-2) - 3$ ，從數線的 $(-2)$ 向下數三單位，得到 $(-5)$ 。
- 知道可以用計算機執行正負數的加減計算，而如果要執行正負數加減的心算或筆算，則所有算式都可以轉換成小學階段的算術：亦即正數加正數，正數減正數（減數小於被減數）。

以上僅提及加、減計算的原因是：課程設計應在負數出現的第一階段，先處理加減運算，因為它們在學生的經驗範圍內有具體的意義（也就是「可識」的或「有感」的）。在乘、除運算上，還可以拆成兩個小的學習階段：先處理負數乘以或除以正數，因為這些計算可以承接「倍數」和「平分」的概念，也是學生具有較穩固基礎的狀況。直到學習方程之後，才因為解方程的具體需求而處理乘數或除數為負數的乘、除運算。同理，以下舉例也僅涉及加、減計算。

在「行」向度的「負數」教學目標，包括

- 能聽、說、讀、寫正數與負數。
- 能在數線上製作和指認正數與負數的位置。
- 能在數線上操作相反數。
- 能用計算機處理正負數混和的加減計算，也能將前述算式改寫成算術的等價形式，並執行心算或筆算，例如 $2 - 5 = -(5 - 2) = -3$ 和 $(-2) + (-3) = -(2 + 3) = -5$ 。
- 能用正負數的加減解決典型應用問題，例如氣溫與海拔高度的變化、交易結餘的盈虧。

在「識」向度的「負數」教學目標，首要任務就是了解整數相對於全數的價值。全數僅能處理「有多少」的量，例如班級的人數、黑板的長度、書包的重量等等，這些量的共同點是它們最少就是沒有，不能比「沒有」更少。但是，有一些量無所謂有沒有，而是給定一個參考點和單位長之後（它們是數線的兩個元素），可以比參考點高，也可以比它低。例如氣溫，攝氏溫標選定水的結冰氣溫為參考點（攝氏 0 度），氣溫可以比 0°C 熱，對應正的溫度，也可以比 0°C 冷，對應負的溫度；再例如地表的高度，一般選定海平面為參考點（海拔 0 公尺），所以通常陸地的海拔為正，但是也有些窪地的海拔為負，而海面下的地形都是負的海拔。全數不方

便用來測量這些類型的量，因此我們需要整數（含負數）。

其次要理解：正負數真正的威力，在於觀念的簡化。氣溫和海拔並不是非得使用負數不可，例如 $-5^{\circ}\text{C}$ 也可以寫「零下 $5^{\circ}\text{C}$ 」，海拔 $-300\text{m}$ 也可以寫「海面下 $300$ 公尺」。類似地，負的結餘也可以在帳本裡用紅筆寫數字，或者把數字寫在括號裡，或者就寫「負債 $5000$ 元」。

但是，使用文字加註全數的方式來處理數量，觀念是龐雜的。例如使用全數記帳，要考慮以下六種情況（其中 $A$ 和 $B$ 皆為全數）：

1. 若昨日（累計）盈餘 $A$ 元，今日賺 $B$ 元，則今日盈餘 $A+B$ 元。
2. 若昨日盈餘 $A$ 元，今日賠 $B$ 元，且 $A \geq B$ ，則今日盈餘 $A-B$ 元。
3. 若昨日盈餘 $A$ 元，今日賠 $B$ 元，且 $A < B$ ，則今日負債 $B-A$ 元。
4. 若昨日（累計）負債 $A$ 元，今日賺 $B$ 元，且 $A \geq B$ ，則今日負債 $A-B$ 元。
5. 若昨日負債 $A$ 元，今日賺 $B$ 元，且 $A < B$ ，則今日盈餘 $B-A$ 元。
6. 若昨日負債 $A$ 元，今日賠 $B$ 元，則今日負債 $A+B$ 元。

相對地，如果令 $x$ 為表示昨日累計結餘的數，累計盈餘時 $x \geq 0$ ，累計負債時 $x < 0$ ；令 $y$ 為表示今日營業小結的正負數，今日有賺時 $y \geq 0$ ，今日賠本時 $y < 0$ 。使用正負數來記帳時，今日的累計結餘就是簡單的 $x+y$ 。可見正負數的計算，可以大幅簡化全數和算術的觀念。這其實就是數學「抽象化」的威力，越抽象的數學，往往適用的範圍越廣，而威力也就越大。但是這些話還不適合對七年級學生說。

很多學生應該會察覺，觀念上的 $x+y$ 在實際計算的時候，還是要根據 $x$ 和 $y$ 的正負性及「值」的大小，轉換成六種情況來算，所以正負數「化繁為簡」的偉大功績，似乎就被打折了。這正是引介科技工具出場的絕佳時機。計算機承擔了正負數加減到全數算術的轉換，並自動執行計算，使得人們可以專注在正負數計算的意義上，而不必真正執行算術的轉換與演算。在數學課程中使用計算機，更加凸顯數學觀念的重要性以及「化繁為簡」的實用性，讓學生專注在數學上，而不是數字上。

最後的「識」是理解正負數兼具「位置」和「位移」的意義，這是全數沒有的概念。例如 $(-3)$ 具備數線上一個點的位置意義，也同時有向下數三單位的位移意義；在 $(-3)+(-3)$ 式中，第一個 $(-3)$ 是位置，第二個 $(-3)$ 是位移，此式的意思是從 $(-3)$ 向下數三單位，所以結果是 $(-6)$ 。此觀念對七年級學生而言並非必要，但是教師應該有所理解，而視情況提點適合的學生。從這個高觀點來看，「負」賦予全數方向性，使得正負數相當於數線上的向量。這個觀念將有助於國中階段的物理學習，也有助於將來平面和空間向量的學習。