1 實數〔教學說明〕

教學目標

如文本的第一句話，這一課的目標就是說明「實數」是測量所得的數；但是此時僅能以感官經驗來理解「測量」的意思。

知

實數是測量所得的數，亦即一個長度相對於單位長的倍數。實數就是數線上所有點的坐標。數線上的點，不全是有理點，剩下的就是無理點。

行

能讀 $\pm$ 與 $\in$ 符號，能用口語說出 $\in\mathbb{N}$「是正整數」，並能用這些符號溝通。

識

（正）整數用來點數離散量，實數用來測量連續量。雖然數線上也有正整數，但它們不是用來點數離散量的正整數。無理數是「揀剩的」，沒必要討論它們的算術封閉性。

主要設計理念

1. 如開場白所述，多數教材陳述的是結論，並沒有真正說明「實數」是什麼。雖然本篇也沒有真的說明，因為我們無法真正說明「測量」，但是若以感官經驗來理解「測量」，畢竟朝向真實的實數概念再走了一步。所謂真正的「測量」概念，就要講到實數的完備性了，請看後面的教學素養。根據「時而言／旋而上」的教學理念，此時並不適合提它出來。
2. 國一（7 年級）就學了數線，但是當時大概僅能用它當作正負數的表徵，此時二度學習數線，理解的層次要提高一些。例如要理解「單位長」是另外給定的一條線段，並非如某些學生所說「1 是單位長」。
3. 「數」與「量」以前是兩種概念，就好像點數和測量是兩種行為，所用的數分別是（正）整數與實數。雖然它們共用了 $1,2,3,4$ 這些數目字符號，但是意義不同。這個概念差異，經常被數學課忽視，但是其實很明顯；這就是為什麼除法有兩種，有時候 $7\div 2$ 應該算出 3 餘 1，有時候卻是 3.5：因為根據情境脈絡，我們能判斷有時候要做正整數除法，有時候要做實數除法。在計算機程式語言裡，符號 7 是整數的 7 還是實數的 7，就需要嚴格限定（明白宣告或默認宣告）。本文提出這個相對概念，但是受篇幅所限，只有淺談即止。
4. 所謂「嚴謹」的數學，主張要證明任意線段可以做任意 n 等分（$n\in\mathbb{N}$），而且還堅持必須「幾何作圖」。本文採感官經驗，直接假設「任意線段可以做任意 n 等分」。事實上，這是「幾何教學公設」之一；它最早在 1960 年代由美國 SMSG 提出，後來由伍鴻熙教授予以推廣。伍教授主張在學校的數學課程中，可以增加若干條「數學教學公設」以利教學的進行，並且有助於鞏固概念。作者支持此提議。本篇的二分點、三分點、四分點、…，就是前述公設理念的應用，學生根據感官經驗都能接受這個想法，而且它確實正確，就當作公設吧，別再鑽進細節了。

5. 大家都知道 $\sqrt{2}$ 為無理數的「標準證明」。作者同意張海潮教授與其他許多教授的主張：那個「標準證明」對中學生完全沒有意義。那個證明之所以那麼繁複，是因為它從《幾何原本》演繹而來。但歐幾里得當年只能使用「不可公度量」概念（參閱後面的教學素養），跟現在的學生所具備的基礎知識相當不同。《幾何原本》的整個「無理數論」（第十卷）早就被後來的知識取代了，實在沒有必要「抱殘守缺」這個 $\sqrt{2}$ 為無理數的「標準證明」。本文直接引用算術基本定理（7 年級就有經驗）來「說明」$\sqrt{2}$ 為無理數，並未使用正規的數學證明語法。這是一個「以實例教學」的實踐。
6. 課文最後一節，其實是呼籲教師同仁，不必過度評量無理數的算術封閉性。

教學備忘

1. 為了將數學作為精確溝通的語言，《別冊》總是注意數學的語言層面教學。所以正式講 ± 是「正或負」的意思，$\in\mathbb{N}$ 是「是正整數」的意思；它們只是簡化口語表達的符號，切莫在此引進整套的邏輯符號與集合符號。
2. 本課作業看似有 2 題探討無理數的算術封閉性，彷彿自相矛盾。這是因為希望讓學生有論述的機會。譬如第 2 題，如果學生要以 $u=\sqrt{2}$ 和 $u=\sqrt{2}+1$ 舉例，說明不能肯定 $1-u$ 是不是有理數，則教師要留意的是，學生有沒有想到必須說明 $1-\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}+1$ 都是無理數？（以 $\sqrt{2}$ 為無理數作為前提。）這一份作業是「論述」，可以口頭說明，跟筆試中的選擇題（複選題）意義不同。
3. 承上，作業第 3 題的重點是希望學生想到，要論述某敘述「未必正確」時，只要舉出一組反例就行了。這也是請教師要協助學生明白的一個重要的思考方法。

教學素養

「實數測量」的真正意義如下；以下 m、n、k 都是正整數（k 可能是 0）。《幾何原本》的第一命題就是複製線段，而且在希臘人的純理性思想裡，誤差是不存在的。所以線段 A 是線段 B 的 n 倍長是可測量的。幾何作圖（尺規作圖）保證了任一線段的 m 等分是可作的，因此線段 A 是線段 B 的 $\frac{n}{m}$ 倍長亦是可測量的。特別可以取 m 為 10、100、1000、…。若點 $P(x)$ 在數線的正側，如果 OP 恰好是單位線段的 n 倍長，就測完了，而 $x=n$。否則點 P 必然落在接連兩個整數點之間（這是一條公設），亦即 $a_0<x<a_0+1$，其中 a_0 為正整數或 0。

接著，我們用 $\frac{1}{10}$ 單位長，從點 $A_0(a_0)$ 開始，向右連續複製它，如果恰好到達了點 P 就測完了，否則持續做到不超過點 P 的最大複製次數 k。令 $a_1=\frac{k}{10}$，則 $a_0+a_1<x$。用同樣的方式，取 $\frac{1}{100}$ 單位長，從點 $A_1(a_0+a_1)$ 開始，向右連續複製它，如果恰好到達了點 P 就測完了，否則持續做到不超過點 P 的最大複製次數 k。令 $a_2=\frac{k}{100}$，則 $a_0+a_1+a_2<x$。依此類推，如果始終沒有測完，就會產生（不嚴格）遞增的有理數數列 a_0、a_0+a_1、$a_0+a_1+a_2$、…，而且它們全都小於 x。這時候我們呼叫完備性公設，而認定 x 這個「實數」是前述有理數數列的「極限」。

無理數來自「不可公度量」的概念。《幾何原本》定義兩線段 A、B「可公度量」的意思是存在第三線段 C，使得 A 是 C 的 m 倍長、B 是 C 的 n 倍長。我們可以論述，如果 m、n 有公因數，則可以放大 C 而仍為 A 和 B 的公度量線段。譬如若 $m=21$、$n=6$，則可以讓 C 變成 3 倍長，它仍可公度量 A 與 B：A 是（新的）C 的 7 倍長、B 是 C 的 2 倍長。這就是分數可以約分的意思。而公度量線段 C 不可能任意拉長，因為如果它比 A 或 B 還要長，就不可能是它們的公度量線段了。所以「可公度量」的兩個線段，必有最長的公度量線段；這就是分數可以約到最簡的意思。應用到數線上（希臘沒有數線觀念），若點 P 在數線的正側，而且線段 OP 與單位線段可公度量，則有第三線段 C，使得 OP 是 C 的 n 倍長、單位線段是 C 的 m 倍長，這表示點 P 是有理點，它的坐標是 $\frac{n}{m}$；而 $\frac{n}{m}$ 可以化約到最簡分數，卻仍是點 P 的坐標。

但是並非任意兩線段接可公度量。例如正方形的一邊 A 和它的對角線 B 就不可公度量。換到數線上，就是說，令 $P(\sqrt{2})$，則 OP 與單位線段不可公度量。用《幾何原本》的想法，這個證明只能用反證法。假設 A 和 B 可被 C 公度量，他要論述以 A 為邊長的正方形 Q_A 和以 B 為邊長的正方形 Q_B 可以被 Q_C 公度量（希臘人還沒有平方數的觀念，他們認為作為面積的數和作為長度的數，是性質不同的兩種數）。用我們的話來說吧，Q_A 是 Q_C 的 m^2 倍，Q_B 是 Q_C 的 n^2 倍，而畢氏定理說 $2m^2=n^2$。接下來就是「標準證明」裡的那一番論述，推論 m 與 n 有公因數 2。因此 C 可以拉長為 2 倍而仍是 A 與 B 的公度量線段。前面的論述保證 C 可以再拉長 2 倍、再拉長 2 倍、…，而一直是 A 與 B 的公度量線段。這是不可能的，因為這樣做下去，C 的長度總有一天會超過 A。

以上就是 $\sqrt{2}$ 為無理數的「標準證明」的來源。對於現代的學生，實在沒有必要用那麼古老的想法來完成這個證明，對吧？對學生來說，只要他們明白：沒有任何分數 $\frac{n}{m}$ 能夠 $\left(\frac{n}{m}\right)^2=2$；同理（雖然很少學生能明白這是「同理」），沒有任何有限小數能夠平方等於 2，這樣就達到概念學習的目的了。

SMSG（School Mathematics Study Group）是美國新數學（New Math）運動的代表作——或者說代罪羔羊。所謂「新數學」不是數學的風潮，而是數學教育的風潮。此一風潮雖以美國最為醒目，但其實是所謂「自由世界」的風潮（共產國家除外），而始作俑者未必是美國。蘇聯在 1957 年發射第一顆人造衛星之後，引起美國朝野的恐慌，導致全面性的「自強」運動。運動的其中一環是教育，特別是科學教育。而數學是所謂的科學之母，所以當然被捲進漩渦的中心。因應而來的美國數學「教改」，多少採取了新數學的課程與教材教法概念。SMSG 跟著新數學運動在 1960 年代初期鵲起，如野火燎原地蔓延，短期內出版了非常多教材，臺灣也在短短幾年之內翻譯了大量的教材，而它卻在 1970 年代初期被迅速地「撲滅」了。臺灣接獲消息，也迅速地改弦易轍。如今，教育界傳聞的新數學以及 SMSG 多半是負面消息，可是當年在中學時代讀過那批教材的教授們，卻多半肯定那段時間所受的教育（也許教授們是偏頗的樣本群）。

依作者之見，SMSG 來得太快，難免矯枉過正、操之過急；但是它被撤除得也同樣太快，並沒有給它反省、修訂、與答辯的機會。一股腦地終止 SMSG，可能就像英文諺語說的：把洗澡水和嬰兒一起潑出去了。SMSG 提出許多數學教育上的主張，並不全是餿主意，把它們全部打入冷宮，也不見得公平。為了教學目的而約定「數學教學公設」的想法，就是其中之一。