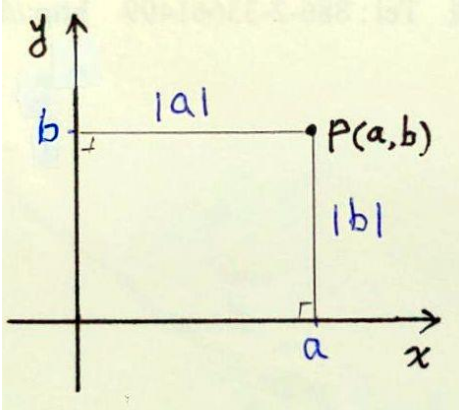
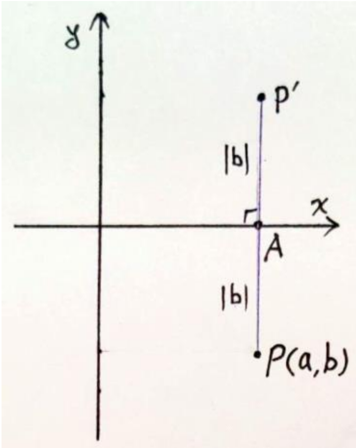
4 坐標算法一（鏡射與旋轉）



當「笛卡兒的平面坐標」剛誕生的時候，它就像一片數學的畫布，讓代數與幾何學者在上面作畫：畫出方程式或不等式的圖形。可是圈內的學者們很快地發現，坐標平面本身具有一些運算性質。試想：知道一點 $P(a,b)$ 的坐標，相當於已經做了點 P 到 x 軸和 y 軸的垂線，知道垂足的位置，也知道點 P 到兩軸的距離，如右圖；這些已經是相當豐富的資訊了。這些資訊，理應為我們提供一些算法。

鏡射/線對稱

最基本的幾何操作之一，是**鏡射**：從給定的一點 P 與一條直線 L，做 P 對稱於 L 的點P'，[1] 其中 L 稱為**對稱軸**，P 與P'互為**對稱點**，而這種對稱關係，稱為**線對稱**。鏡射的幾何原理是作P'使得對稱軸 L 是線段 PP' 的中垂線。



當對稱軸是 x 軸或 y 軸時，互相對稱的兩點 P 和P'坐標有固定的算法。例如當 $P(a,b)$ 在第四象限，如右圖，其中 $a>0$、$b<0$，P 與P'對稱於 x 軸，求點P'的坐標。令 P 在 x 軸的垂足是 A，其實 A 也是線段 PP' 的中點。根據坐標平面的規則，我們知道 A 的坐標是 $(a,0)$。因為x軸垂直於線段 PP'，所以P與P'都落在鉛直線$x=a$上；因此P'的 x 坐標是 a。因為 $\overline{PP'}=|b|$，也就是說P'到 x 軸的距離為 $|b|$，而且P'在第一象限，所以P'的 y 坐標是 $|b|=-b$。總結而言，$P(a,b)$ 對稱於 x 軸的點是 $P'(a,-b)$。

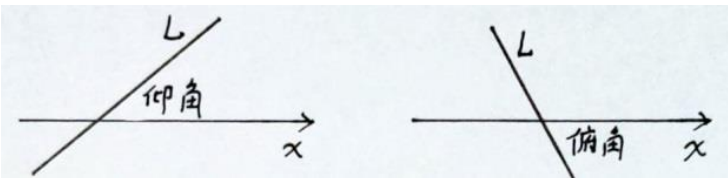
很容易驗證：當點$P(a,b)$ 在第一、第二、第三象限或在 y 軸上時，對稱於 x 軸的點P'坐標皆為 $(a,-b)$，所以我們可以作成一般性的結論：

$P(a,b)$ **與** $P'(a,-b)$ **對稱於** x **軸**。

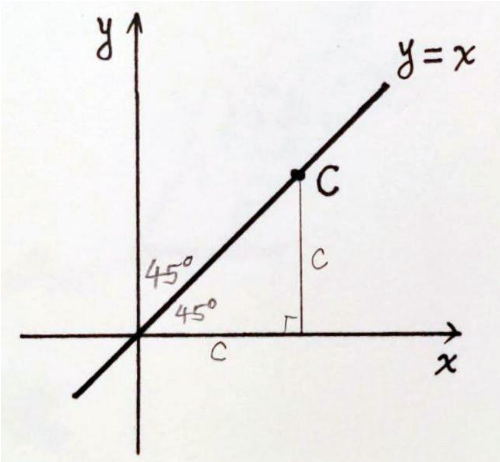
[隨堂練習 1]

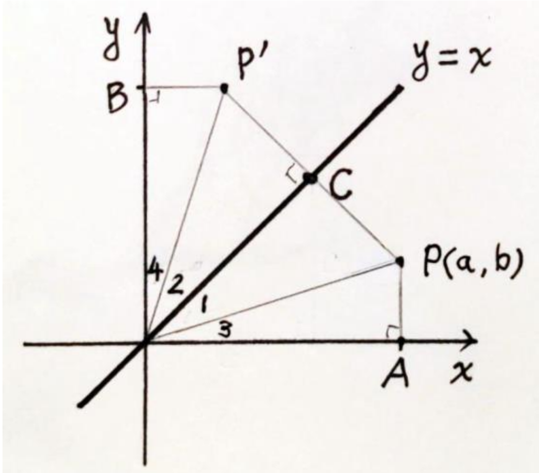
試推論點$P(a,b)$ 對稱於y軸的點坐標。 若是教室內的活動，不妨分為四組，分別假設點$P(a,b)$ 在第一、第二、第三、第四象限，求其對稱於y軸的點坐標。然後比對各組的答案。獲得共識之後，請按照前面的句型寫下結論：

除了 x 軸和 y 軸以外，坐標平面上還有一條常用的特殊對稱軸，就是直線 $y=x$。直線 $y=x$ 有什麼特殊呢？參照次頁的左圖，直線 $y=x$是 x 軸和 y 軸的角平分線。這個現象還有另一種說法，但我們要先定義一組詞彙。當直線 L 與 x 軸交於一點，它與 x 軸正向所夾的銳角，稱為 L 的**仰角**或**俯角**，如右圖。



[1] 符號 P' 讀作 P prime。





運用仰角和俯角的詞彙，可以說

直線 $y = x$ 的仰角是 45°，所以也稱為「45 度直線」。

原因是：參照上面的左圖，在第一象限裡任取直線 $y = x$ 上一點 C，它的坐標必然形如 (c,c)；從 C 做 x 軸的垂線，則 C 點、原點、垂足形成等腰直角三角形，可見直線 $y = x$ 的仰角是45°。

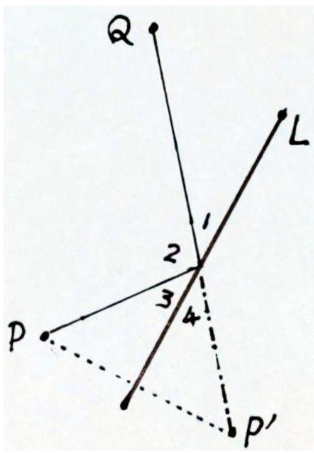
接著探究點 $P(a,b)$ 對稱於 $y = x$ 直線的點坐標。設點 P 在第一象限，參照上面的右圖，令 P' 與 P 對稱於 $y = x$ 直線，且 C 是線段 PP' 的中點，A 是 P 在 x 軸上的垂足，B 是 P' 在 y 軸上的垂足；令原點為 O（沒寫在圖裡）。因為 $y = x$ 直線是線段 PP' 的中垂線，所以 $\angle 1 = \angle 2$ 且 $\overline{OP} = \overline{OP'}$。因為 $y = x$ 直線是 x 軸和 y 軸的角平分線，所以 $\angle 3 = \angle 4$。又因為 $\overline{OP} = \overline{OP'}$，所以 ΔOPA 與 $\Delta OP'B$ 全等。因此 $\overline{OB} = a$、$\overline{BP'} = b$。而 P' 在第一象限，所以 P' 的坐標是 (b,a)。

[隨堂練習 2]

試推論點 $P(a,b)$ 對稱於 $y = x$ 直線的點坐標。若是教室內的活動，不妨分為四組，分別假設點 $P(a,b)$ 在第二、第三、第四象限或 x 軸上，求其對稱於 $y = x$ 直線的點坐標。比對各組的答案，獲得共識之後，請按照前面的句型寫下結論：

最後補充一件小事：當點 P 就在對稱軸 L 上時，它的對稱點 P' 就是點 P 自己。

反射



為什麼要討論線對稱？除了幾何上的美感以外，它有個實用的動機：古希臘人發現「反射」問題可以用鏡射來處理。

參照右圖，想像從點 P 射出的粒子被直線 L 反射到點 Q。同學可以想像直線 L 是一堵牆的上視圖，射出的粒子可以是一顆球或一束光。根據反射的定義：$\angle 1 = \angle 3$。[2] 令 P' 是 P 相對於 L 的對稱點，則 $\angle 3 = \angle 4$，所以 $\angle 1 = \angle 4$。因為 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ 是一個平角，所以 $\angle 4 + \angle 2 + \angle 3$ 也是一個平角，可見點 Q、碰撞點、點 P' 落在同一條直線上。換句話說，粒子被 L 反射的軌跡，是由直線 $P'Q$ 決定的。根據這個原理，古希臘學者可以用數學中的幾何方法處理物理上的反射問題。

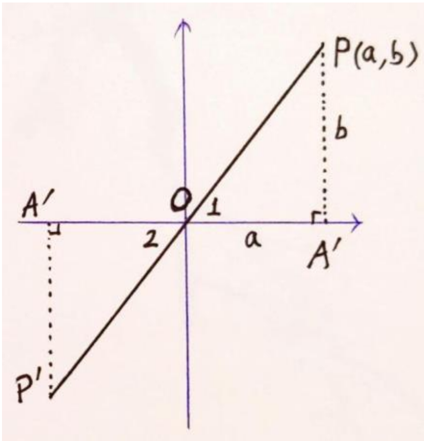
[2] 注意，圖中的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 並不是物理詞彙中的入射角和反射角。物理用到「法線」，我們以後再說。

[隨堂練習 3]

假如要從點 $P(1,-2)$ 朝 y 軸射出粒子，使它被 y 軸反射到 $Q(2,3)$ ，求碰撞點的坐標 $(0,b)$ 。（養成好習慣：先繪草圖，再解題。）

點對稱

給定兩點 P 和 M，所謂 P 與 P' 對稱於 M，或者說 P 相對於 M 的對稱點是 P' ，意思是 M 是線段 PP' 的中點；此時我們說 P 和 P' 的關係是**點對稱**，而 M 是 P 與 P' 的**對稱點**。相信大家都同意：坐標平面上最特殊的對稱點，莫過於原點。以下，我們就來探索點 $P(a,b)$ 相對於原點的對稱點 P' 坐標。



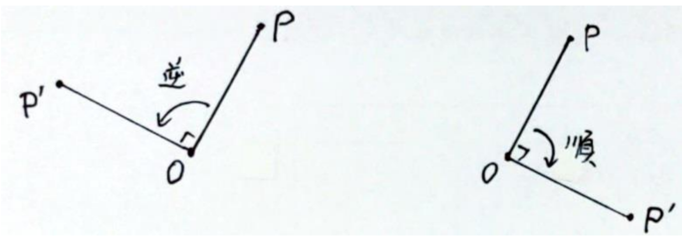
參照右圖，設點 $P(a,b)$ 在第一象限，它相對於原點 O 的對稱點 P' 在第三象限。點 A 是 P 在 x 軸上的垂足，點 A' 是 P' 在 x 軸上的垂足。因為 $\angle 1=\angle 2$（對頂角）而且 $\overline{OP}=\overline{OP'}$ ，所以 ΔOAP 與 $\Delta OA'P'$ 全等；可見 $\overline{OA'}=a$ 、 $\overline{P'A'}=b$ 。意思是說 P' 的 x 坐標的絕對值是 a，它的 y 坐標的絕對值是 b。但 P' 在第三象限，所以它的 x 坐標是 $-a$ 、y 坐標是 $-b$ ，亦即 $P'(-a,-b)$ 。

同學們很容易檢查：當點 P 在第二、第三、第四象限，或者 P 在 x 軸、y 軸上時，所得的對稱點 P' 坐標公式皆相同，所以就不麻煩各位練習了。一般性的結論如下：

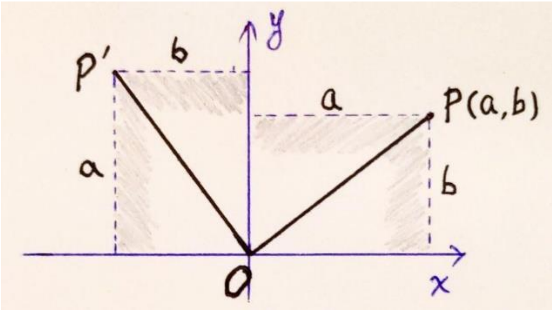
$P(a,b)$ **與** $P'(-a,-b)$ **對稱於原點**。

旋轉

所謂旋轉必須有一個中心點；在坐標平面上，最方便的中心點，當然是原點。除非特別聲明，否則坐標平面上的旋轉一律以原點為中心。此外，平面上的旋轉，顯然有兩個方向。按照我們共同的生活經驗，分為**順時鐘**方向和**逆時鐘**方向；這是指我們面對時鐘和面對平面圖形所見的方向。例如以下兩圖，點 P' 分別是點 P 繞點 O 逆時鐘和順時鐘旋轉 90 度的結果，其中 $\overline{OP}=\overline{OP'}$ 且 $\angle POP'=90°$ 。



假設點 $P(a,b)$ 在第一象限。參照下圖，我們以原點 O 和點 P 為對頂點，沿著 x 軸和 y 軸畫一個輔助長方形；它的寬是 a 而高是 b。將整個長方形繞 O 逆時鐘旋轉 90 度，它的對角線段 OP 當然也就旋轉了 90 度，到達點 P'。旋轉後的長方形，寬是 b 而高是 a，也就是說 P' 與 x 軸的距離是 a、與 y 軸的距離是 b。因為 P' 在第二象限，所以它的 x 坐標是 $-b$、y 坐標是 a，亦即 $P'(-b,a)$。



[隨堂練習 4]

試以旋轉的原理，寫出以下各點繞原點逆時鐘旋轉 90 度的點坐標。

(1) 點 $(3,0)$，　(2) 點 $(-\sqrt{2},2)$，　(3) 點 $(-1,-1)$，　(4) 點 $(1,\frac{1}{3})$。

答：(1) ＿＿＿＿＿　(2) ＿＿＿＿＿　(3) ＿＿＿＿＿　(4) ＿＿＿＿＿

經過以上的舉例練習，相信讀者已經歸納出一般性的結論：

$P(a,b)$ 繞原點逆時鐘旋轉 90 度成為 $P'(-b,a)$。

[隨堂練習 5]

請用逆時鐘旋轉 90 度三次來推論順時鐘旋轉 90 度的點坐標公式。仿照以上句型，寫出結論：

[隨堂練習 6]

請用旋轉兩次 90 度來驗證：不論順時鐘或逆時鐘旋轉 180 度，結果皆相同；而那結果是：

作業 4

班級座號＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 試論述「相對於原點的點對稱」和「繞原點旋轉 180 度」是同樣的動作。
2. 試求點 $P(2,1)$ 對以下直線的鏡射坐標。
   (1) x 軸， (2) $y=1$， (3) $x=1$， (4) $y=x$， (5) $y=-1$
3. 假如要從點 $P(2,1)$ 朝 x 軸射出粒子，使它被 x 軸反射到 $Q(0,2)$，求碰撞點的坐標 $(a,0)$。
4. 假如要從點 $P(2,1)$ 朝 $y=x$ 直線射出粒子，使它被 $y=x$ 直線反射到 $Q(0,-3)$，求碰撞點的坐標 (c,c)。