

英數兩全

脈絡中的數學英文關鍵詞

單維彰

國立中央大學

2024-03-14

作者簡介

單維彰

民國 51 年出生於臺北市，民國 80 年獲美國賓州州立大學數學博士之後，便於中央大學任教，服務於數學系、師資培育中心、文學院學士班，開設數學方面的專業、師培與通識課程，也創造了幾門跨領域課程；他是 100-106 學年間的語言中心主任，並曾短暫兼任文學院副院長。他是十二年國民教育之 108 課綱數學領域副召集人，並長年擔任高中數學學科中心諮詢委員。他也是臺灣數學教育學會、工業與應用數學會、駱駝登山會與中華山岳協會的終身會員，他在 50 歲生日時完成臺灣百岳。

內容簡介

這本書始自高中數學學科中心舉辦的數學教師雙語教學研習教材，以 108 篇短文串起中小學課程範圍內的數學中文與英文術語——也就是書名所指的數學英文關鍵詞；網頁上搭配各篇文字的朗讀音訊，提供這些關鍵詞的讀音示範。各篇短文依課程綱要指定的數學學習內容分類，可在目次中輕易搜尋主題；兩頁對開的篇幅，使得各主題的關鍵詞皆可一目了然；詳細編列的中文與英文索引可以當作術語詞表，方便讀者從中文查閱相對的英文關鍵詞，或者反查。

在高中，這本書足夠勝任一學期的數學英文選修課教材，也可以搭配課業進度當作雙語輔助讀本；可以將此教材分散到三年高中數學課程中，也可以用作統整複習的讀本，在準備進入大學之前密集學習。作者自己把這本書當作數學師資培育的教材之一，數學教師與相關專業人士可以用它自我充實，或者放在案頭參考備忘。

前言

每一本書有它的使命。就其功能而言，這本書可以作為教材，也可以當作參考書。如書名所示，作者意圖統整羅列中學以下（包括國中、國小）的中英文數學關鍵詞。每個領域都有一些關鍵術語，就是書名所謂的關鍵詞，進入一個領域相當程度地等於是掌握這些關鍵詞。但是本書不以術語詞表 (glossary) 呈現關鍵詞，而是以有意義的短文，在脈絡中串起關鍵詞。書末的中文與英文索引可以充當術語詞表。

從後設的觀點看，作者意圖以這份教材展示一些理念的可行性，並且藉由數學課程內容的統整複習，初步呈現他對中小學數學課程編排的主張。

以下分節說明前述理念，並提供本書的使用建議。

核心理念

首先，在大多數的中小學數學課堂裡，全英語的教學是不切實際的；如果想要在數學教育中加入相關的英語文學習目標，必須以雙語（華語與英語）教學。作者主張：在高中數學課程實施雙語教學，有以下三點目的。¹

(一) 為學生將來可能在大學進入全英語的教學環境做準備。

(二) 透過數學英文詞彙的字源，提高在中西文化的脈絡中認識與

¹ 取自單維彰，曾政清（2022）。高中數學雙語教學之理念與作法倡議。臺灣數學教師，43(1), 35-47。

理解數學的機會。

(三) 經由擴大數學教材與評量的學習經驗，調整數學教育之目的與價值的品味。

據此理念，在高中數學課程中實施雙語教學，不僅是為了支持國家政策而已，同時也有數學教育本身的意義，有機會改善我們的教學成效。也就是說，雙語教學也有屬於數學的內在動機。

如果教師具備雙語教學的動機，則數學的英文詞彙與相關文化脈絡，應該要設定為教學目標，而不是可有可無的附贈品。教師或師資生具備雙語教數學的動機之後，需要提昇自己在數學專業領域內的英語文能力，也可能希望發給學生輔助材料，這些就是本書的功能所在。

■ 為大學的專業學習準備數學英文能力

目的（一）應是容易理解的：如果在不久的將來，全國各大學確如國家願景而開設了大量的全英語課程（稱為 **EMI** 課程），則高中畢業生理應為它做好準備。但數學課程不負責一般語境的英語學習（簡稱日常英語：**EGP**），僅支援數學領域內的學術語境英語學習（簡稱學術英語：**EAP**）。這是因為 **EMI** 以專業領域的知識／技能傳遞為目的，英語的角色為教與學的媒介，高中數學課程理所當然應該為學生準備以英語為媒介的數學專業知識與技能。²

數學領域的 **EAP** 有特別的重要性，因為它是理工醫農商管資電學群的專業學習共同語言，而且，國內理工科系的大學教授，

² **EMI** 是「英語作為教學媒介」(**English as a Medium of Instruction**) 的縮寫，用意是在國際學生組成的班級中，以（全）英語授課。**EGP** 和 **EAP** 分別是 **English for General Purposes** 和 **English for Academic Purposes** 的縮寫。

即使不以英語授課也經常直接使用歐美出版的英文教科書，甚至在評量試卷上直接以英文命題。高中數學課程已經為學生準備了所需的數學基礎知識，但是當它們以英文的慣用語句表達時，學生難免一開始感到陌生；如果因此而阻礙了大學階段的學習，就很遺憾了。在高中數學課程中引入 EAP 英文，最主要的目的就是幫助學生銜接大學的英文教材。這本書就是針對我國高中數學內容設計的英文字詞與常用句式教材，可作為此一理念的實踐範例。

■ 利用字源幫助文化脈絡的理解

一個文化最顯著的特徵就是語言，語言／文字的流變，可以幫助理解文化的發展。而數學——如數學領綱的第三項理念——是一種人文素養，宜培養學生的文化美感。英文的數學詞彙經常能提供數學在西方文化脈絡中的角色，而許多數學詞彙譯自英文，所以雙語教學提高了在文化中認識與理解數學的機會，而課綱主張這些脈絡中的知識將會提升數學素養。

舉例而言，有理數 (**rational**) 在普通英文中主要的意思是「合理的，有理性的」，但它本來是 **ratio**「比例」的形容詞，也就是「成比例的」的意思。可見「有理數」來自成比例的兩個正整數，也就是它們的比值。(第 4 課)

再舉一例。對數 **logarithm** 來自拉丁化的兩個希臘字 **logos-arithmos** 的合併，直譯為 **ratio-number**：比例數。取這個名字的原因，可能是因為當初的動機是發現了：如果把等比數列寫成次方形式，則它們的指數會形成等差數列。當 **logarithm** 在明朝末年首次傳入中國時，的確翻譯成「比例數」。當時把 $a = 10^u$ 的數對 (a, u) 「對列成表」，稱為「對數表」，其中 a 稱為「原數」，到了

康熙時代改稱「真數」，而「與 a 相對的數」最後就稱為「 a 的對數」了。(第 19 課)

諸如此類的內容，散布在整本書裡，作為目的(二)的一種實踐範例。

■ 接觸西方教材可望調整數學教育的品味

擴展視野，就是調整品味的契機。雙語教數學之後，教師有更多機會直接閱讀西方的教材與評量試題，學生也有更多機會閱聽西方的教科書或教學影片。大家都開拓了視野，使得大家都有較多的機會，反省我們自己的數學教育現況。

西方的數學教育也有他們自己的文化包袱，因此有他們必須思索的改善方向。我國的數學教育現況，有些地方類似於國際間共同的問題，但是也有我們獨特的狀況。

舉例來說，以下可能是英文教材值得我們學習的特徵：有效運用科技工具(包括 Calculator 和 App)，討論接近真實情境的應用問題，從科學與工程中擷取大量的數學模型作為例題或試題；而且，在初學一項數學物件時，給予學生大量的基礎練習。等到越來越多教師同仁檢驗了英文數學教材與評量的教學成效，而且如果獲得了正面的實徵經驗，我們就有機會做較大規模的討論，在獲得共識的方向上，一起改變。

這本書在篇幅容許的範圍內，也盡量提供調整教學內容與次序的建議。例如書裡多次以程式語言或程式設計作為數學物件的類比，因為計算機科學可能是我國學生最主要的從業領域之一。又如書中提倡三角的學習應以測量與計算為主，學習三角比的同時就反查三角(第 38-40 課)。再如作者認為三角形全等的教學

目標應該從理論證明轉移到三角形的測量與計算（第 42 課）。這些項目，都是來自觀摩西方教材所獲的心得。

華洋模式

前面說的是理念，這本書展示了教材層次的實踐可行性，然而教師該怎麼行動呢？行動的原則性策略，不妨參照林子斌提議的「沃土 (FERTILE)」模式。³「沃土」策略意在上位，並不針對特定學科，數學科的雙語教學也大多可遵循；但凡一體適用的通則，在個別特例上多少需要微調。作者特別要提請商榷的是 I 策略：教學策略 (FERTILE 當中的 I 代表 Instructional Strategies)。

我要指出的關鍵點是：數學（乃至於整個理工學科）教學語言中的中英夾紵是自然的，有時候甚至是必要的，就好像前兩行寫在括弧裡的中英夾紵，它並不是「晶晶體」。數學教學中的中英夾紵，在臺灣的大學數學本科教學中是自然的、常態的，它應該是所有數學系畢業生的共同經驗，所以特別容易轉化為高中課堂的教學語言。作者將此特徵稱為「華洋模式」。

華洋（1945–2023）是數學界的前輩，作者的老師，他非常聰明幽默、多才多藝，曾在中央大學擔任計算機中心主任、數學系主任。中央大學數學系的另三位前輩：王九達、胡門昌、柯慧美，合著一本《微積分講義》。在內容上，這部講義以民國 72 年課程標準《理科數學》的單變數微積分為基礎，延伸而成大學微

³ 林子斌（2021）。建構臺灣「沃土」雙語模式：中等教育階段的現狀與未來發展。《中等教育》，72(1)，6–17。這篇文章附帶一則訊息：風行全國的雙語教學「運動」，可能始於臺北市；當時的柯文哲市長師法新加坡或荷蘭而在臺北市推動教育的政策，在他 2016 年訪問新加坡之後「推動臺北市雙語教育之決心更加明確」。

積分。除了關於教學內容的創新安排以外，這部講義還有語言方面的創新設計，如其引言所述：

本書的語言也有一項特色：在上篇中我們混雜使用中文和英文，愈到後面英文愈多，在下篇則全用英文。我們是主張科學中文化的，但毋庸諱言，我國的科學尚未到達領導地位，大學生以後研讀功課尚須使用英文課本，就業後亦不乏以英文閱讀與撰寫科學文字的需要。培育英文能力，此其時也。因此循序漸進，在大一微積分的課程中，養成其閱讀英文數學書的能力，可免日後的恐慌。

王九達是臺灣數學界耆老，也是華洋的老師。他曾笑稱這部講義的語言設計就是「華洋」：由華入洋。先用華文，慢慢摻入洋文，中英夾敘，最後全用洋文。教學語言的中英夾敘，意圖使英文比例愈來愈大，最終全英文，就是作者所謂的「華洋模式」。

大學本科教育的華洋模式要把學生帶到全英文的境界，但是在中小學並不需要。把時間拉長來看，從小學到高中可以視為「由華入洋」的次第進程，最後能完成在大學就好了。

數學系師生在教學、學習溝通時的中英夾敘，可以理解為日文外來語片假名的升級版——我們不用中文拼寫英文，直接把英文放在中文的語句中使用，彷彿它就是中文的一部份。將此模式轉化為中學的雙語教學，最需要關注的是：發音應盡量正確。並不是要求某個地區的標準口音，而是要求在全球化英語 (Globish) 標準下的正確性。這就是本書在文字之外，特意提供朗讀示範的原因。

華洋模式相容於學科內容與語言整合教學 (CLIL)⁴。整合教學的立論之一，就是共通語（華語）適合用來作專業以外，或者輔助專業的日常溝通，譬如在生活經驗中舉例說明一個數學概念，還是說國語比較方便；而目標語（英語）則適合用來發展精確的專業知識／技能。有一些詞，譬如 **minor** 和「餘子式」，**cofactor** 和「餘因子」，刻意用中文翻譯並不會使它變得更容易了解，何況將來需要用到這些概念時，多半會在英文脈絡中，這時就不如直接用英文，把它們假名化（如第 91 課）。

這本書的寫作，就是中英夾紵之數學書寫的一種展示。

本書使用辦法

在前述理念之下，這套教材以較高觀點統整複習中學以下之數學內容，並以中英夾紵的方式融入學術目的的英文（作者稱之為「華洋模式」）。作者賦予此書多重目的：高中生／準大學生的數學複習與英文預習、職前師資培育、在職教師賦能培力、搭配高中課程的雙語補充讀物，以及數學學習架構的總整。因此，本書的假想讀者包括準備進入數學、科學或工程領域的學生，中學數學的師資生，中學數學教師，以及數學教育領域的同仁。

作者建議如何使用這本書？任何人都可以把它當作參考資料，隨著需求而翻閱；作者刻意縮小這本書，希望提高它的便利性。首先，這本書比照數學課程綱要對於學習內容的分類概念，虛分六章，方便讀者在目次中翻找主題。其次，每課課文皆為對開之兩頁（原則上），讓人一目了然，無須前後翻找。最後，按照

⁴ CLIL 是 Content and Language Integrated Learning 的縮寫，讀成一個字。

中文與英文語用差異而獨立製作的中文索引、英文 **Index**，應該能充當術語詞表的功能，提供另一種使用方式。因為課文皆為二頁，詞條的頁碼通常指向左頁，讀者可自行瀏覽整面。

教師可以搭配教學進度，將此書單篇課文影印給學生，當作數學英文或數學文化的補充讀物。雙頁一面的課文設計，讓教師更方便影印所需的內容。教師同仁應該看得出來：部份課文其實也可以讓國中生閱讀。

根據語言學習專業的建議，語言的學習最忌一曝十寒；最理想的語言學習環境是沉浸於目標語（英語）的環境裡，但我們都知道在臺灣很難實現沉浸的環境。退而求其次，就是穩定的學習節奏：每天適度的練習，保持固定的節奏，不拖延，不躁進。將此書當作教材的學生，不論自學還是修課，都應該秉持「持之以恆」的語言學習原則，每天投入固定時間。

這本書編成 **108** 課，就是為使學生能夠「類似沉浸」在數學英文的學習環境中。作者為每一課提供放聲閱讀的音訊檔案，以一名「數學教師」而非英語教師或母語人士的標準提供讀音示範。每篇的閱聽時間大約 **5** 分鐘，即使反覆練習以及反省思考，應該也可以在 **10** 分鐘內完成。教材提供的資源，足夠連續 **18** 週，每週 **6** 天的持續學習。作者期許學生按此進度：每天一課，不拖延也不躁進，每天投資 **10 - 20** 分鐘，持之以恆地學習，相信都能聚沙成塔，獲得豐富的成效。

最後，作者在整本書裡夾帶了對於數學課程內容與編序的看法。例如 **(1)** 將向量、複數列入「代數」，因為作者主張複數涵蓋平面向量，而複數是從二次方程創造出來的數；**(2)** 整併出「離散數學」一個主題，因為作者認為未來的數學學習內容要有越來越

多的離散數學；(3) 將統計放在機率之前，這是想要把統計當作主要的學習目標，把機率視為統計的語言；(4) 在主題上取消「幾何」，因為作者期望淡化歐氏平面幾何，凸顯空間概念的重要，並且融合歐氏幾何與卡氏幾何（坐標幾何）的學習。各章課文的順序，是作者認為各大主題之理想教學編序，而主題間內容重疊的課文，就是各主題可串接而形成綜合性數學課程的節點。例如在代數主題的「二元一次方程式」指出：因為它是「被兩點唯一決定」的數學物件，所以它就「是」一條直線，在這裡連接平面與空間形體，藉此概念提早引進（並且融合）歐氏和卡氏平面幾何的學習。書裡有許多這方面的伏筆，難以一一列舉，數學教育同仁應該看得出來。

誌謝

受到前述《微積分講義》的啟發，我從 90 學年起嘗試在微積分課程中融入相關的英文教育，期望學生發展自己閱讀英文教科書的能力，因此而陸續製作用中文解釋英文微積分課本的教材。2003 年春季的一天下午，與時任理學院院長的葉永烜院士聊及此事，他替這批教材取了名字：數學英文。

2005 年春季，我獲得中央大學教務處的經費支持，開始「英文與數學協同教學」創新教學計畫。語言中心管冰琛主任支持這項計畫，她引介一些英語教師參與實驗。我的第一位合作伙伴是劉愛萍老師。後來，為了在微積分聯合教學中融入學術導向的英文教育，有更多英語教師加入；我因此與語言中心結緣。潘明蓉老師說這些教育可以造就「英數兩全」的學生。

時間來到 2021 年 9 月，高中數學學科中心的（建國中學）

曾政清老師向我解釋數學教師同仁對於雙語教學任務的關切，或者說焦慮。在 12 月 23 日的學科中心諮詢會議之後，我們具體決定為種子教師做一次先導性的「數學雙語教學工作坊」，並於 2022 年 3 月開課；此工作坊的教材，經過一年的擴編形成了這本書。書稿送交中央大學出版中心之後，李瑞騰主任送我這本書的副標題：脈絡中的數學英文關鍵詞。

書籍不等於教材，教材亦不等於課程。這本書、這套教材與課程的實現，要特別感謝以下同仁：林文淇教授為我擬定課程的實施原則，我的教材是在此課程設計的前提之下撰寫的；李振亞教授支持了一整個學期的課程實驗。中央大學語言中心耿文瑤老師參與了整個工作坊，而且全程投入後續的擴編，她聽過我全部的朗讀錄音，也是英文字詞的教學錄音者；耿老師可謂這份教材的協同教學者。美國加州初級中學數學教師劉澄賢 (Teresa Luo) 答覆我所有課室習慣用語的提問，她是我的主要諮詢對象。中央大學出版中心王怡靜持續推動這本書的寫作，並且從網頁整理出第一批書稿。數學學科中心籌備工作坊期間，匯入了蕭弘玫老師 (Berri Hsiao)、周慧蓮老師、蕭佑玟老師以及陳界山教授的經驗與觀點。儘管如此，這本書若有謬誤，仍是作者本人的責任，並請讀者不吝指教。



單維彰 <https://shann.idv.tw>

國立中央大學師資培育中心、文學院學士班與數學系
民國百十三年三月於臺灣中壢

目次

數與量

- 1 報數 Number 2
- 2 整數 Integer 4
- 3 算術 Arithmetic 6
- 4 有理數 Rational Number 8
- 5 比 Ratio 10
- 6 次方 Power 12
- 7 數線 Number Line 14
- 8 分數與小數 Fraction 16
- 9 分小數互換 Algorithm 18
- 10 實數 Real Number 20
- 11 數系 Number System 22
- 12 運算次序 Precedence 24
- 13 數列 Sequence 26
- 14 有規則的數列 Pattern 28
- 15 級數 Series 30
- 16 概數 Approximation 32
- 17 次方運算 Exponentiation
34

- 18 指數律 Exponent Rules 36

- 19 對數 Logarithm 38

- 20 利息 Interest 40

- 21 財務 Finance 42

- 22 同餘 Modulo 44

- 23 希臘字母 Greeks 46

平面與空間形體

- 24 幾何 Geometry 48

- 25 歐氏幾何 Euclidean
Geometry 50

- 26 空間概念 Spatial Concepts
52

- 27 基本形體 Shapes 54

- 28 基本平面圖形 Plane
Figures 56

- 29 直線 Line 58

- 30 圓 Circle 60

- 31 角 Angle 62

- 32 角量 Degree / Radian 64

- 33 四邊形 Quadrilateral 66
- 34 三角形 Triangle 68
- 35 多邊形 Polygon 70
- 36 對稱 Symmetry 72
- 37 視圖 Projection 74
- 38 相似形 Similar Figures 76
- 39 直角三角形 Right Triangle
78
- 40 正餘弦 Sine and Cosine 80
- 41 外接圓 Circumcircle 82
- 42 三角形的建構 Con-
struction 84
- 43 三角形內心 Incenter 86
- 44 三角形的測量 Sides and
Angles 88
- 45 重心 Center of Mass 90
- 46 平行 Parallelism 92
- 47 平面的法線 Perpen-
dicularity 94
- 48 軌跡 Locus 96
- 49 多面體 Polyhedron 98
- 50 旋轉體 Revolution 100
- 51 圓錐曲線 Conics 102
- 離散數學**
(含集合、邏輯)
- 52 離散數學 Discrete Math
104
- 53 集合 Set 106
- 54 集合建構 Set Builder 108
- 55 集合關係 Set Relation 110
- 56 排列 Permutation 112
- 57 組合 Combination 114
- 58 重複組合 Repetitions 116
- 59 組合的延伸 Binomial 118
- 60 集合運算 Set Operation
120
- 61 命題 Statement 122
- 62 條件命題 Conditional 124
- 63 逆否命題 Contrapositive
126
- 統計與機率**
- 64 描述統計 Description 128
- 65 資料分布 Distribution 130

- 66 資料蒐集 Data Collection 132
- 67 樣本與母體 Population 134
- 68 統計表 Statistical Table 136
- 69 長條圖 Bar Chart 138
- 70 直方圖 Histogram 140
- 71 雙變量分析 Bivariate 142
- 72 可能性 Odds 144
- 73 機率 Probability 146
- 74 事件 Event 148
- 75 機率算則 Probability Rules 150
- 76 機率樹 Probability Tree 152
- 77 貝斯定理 Bayes' Theorem 154
- 代數
(含坐標幾何、向量、矩陣)
- 78 數學表達式 Expression 156
- 79 方程 Equation with Unknowns 158
- 80 平面直角坐標系 Coordinates 160
- 81 直線方程式 Line Equation 162
- 82 比例式 Proportion 164
- 83 圓方程式 Circle Equation 166
- 84 聯立方程 System of Equations 168
- 85 多項式 Polynomial 170
- 86 方程 (式) Polynomial Equation 172
- 87 二次曲線 Quadratic Curve 174
- 88 三角比 Trigonometry 176
- 89 推廣的三角比 Trigonometric Ratio 178
- 90 三角恆等式 Trigonometric Identity 180

91 行列式 Determinant 182	101 線型與反比函數 Linear Function 204
92 向量 Vector 184	102 基本函數 Elementary Function 206
93 線性組合 Linear Combination 188	103 三角函數 Trigonometric Function 208
94 行列式運算 Multilinearity 190	104 正弦波 Sinusoid 210
95 矩陣 Matrix 192	105 指對函數 Exponential and Logarithmic Function 212
96 複數 Complex Number 194	106 反函數 Inverse Function 214
97 複數平面 Complex Plane 196	107 無窮 Infinity 216
數學分析 (含基本函數)	108 微積分 Calculus 218
98 函數 Function 198	拼音檢索對照表 220
99 函數的表達 Function Representation 200	索引 221
100 函數運算 Function Operation 202	Index 238

