

英數兩全

脈絡中的數學英文關鍵詞

單維彰

國立中央大學

2024-12-24

請在 PDF 瀏覽器上「雙頁檢視」

前言

每一本書有它的使命。就其功能而言，這本書可以作為教材，也可以當作參考書。如書名所示，作者意圖統整羅列中學以下（包括國中、國小）的中英文數學關鍵詞。每個領域都有一些關鍵術語，就是書名所謂的關鍵詞，進入一個領域相當程度地等於是掌握這些關鍵詞。但是本書不以術語詞表 (glossary) 呈現關鍵詞，而是以有意義的短文，在脈絡中串起關鍵詞。書末的中文與英文索引可以充當術語詞表。

從後設的觀點看，作者意圖以這份教材展示一些理念的可行性，並且藉由數學課程內容的統整複習，初步呈現他對中小學數學課程編排的主張。

以下分節說明前述理念，並提供本書的使用建議。

核心理念

首先，在大多數的中小學數學課堂裡，全英語的教學是不切實際的；如果想要在數學教育中加入相關的英語文學習目標，必須以雙語（華語與英語）教學。作者主張：在高中數學課程實施雙語教學，有以下三點目的。¹

(一) 為學生將來可能在大學進入全英語的教學環境做準備。

(二) 透過數學英文詞彙的字源，提高在中西文化的脈絡中認識與

¹ 取自單維彰，曾政清（2022）。高中數學雙語教學之理念與作法倡議。臺灣數學教師，43(1), 35-47。

理解數學的機會。

(三) 經由擴大數學教材與評量的學習經驗，調整數學教育之目的與價值的品味。

據此理念，在高中數學課程中實施雙語教學，不僅是為了支持國家政策而已，同時也有數學教育本身的意義，有機會改善我們的教學成效。也就是說，雙語教學也有屬於數學的內在動機。

如果教師具備雙語教學的動機，則數學的英文詞彙與相關文化脈絡，應該要設定為教學目標，而不是可有可無的附贈品。教師或師資生具備雙語教數學的動機之後，需要提昇自己在數學專業領域內的英語文能力，也可能希望發給學生輔助材料，這些就是本書的功能所在。

■ 為大學的專業學習準備數學英文能力

目的（一）應是容易理解的：如果在不久的將來，全國各大學確如國家願景而開設了大量的全英語課程（稱為 **EMI** 課程），則高中畢業生理應為它做好準備。但數學課程不負責一般語境的英語學習（簡稱日常英語：**EGP**），僅支援數學領域內的學術語境英語學習（簡稱學術英語：**EAP**）。這是因為 **EMI** 以專業領域的知識／技能傳遞為目的，英語的角色為教與學的媒介，高中數學課程理所當然應該為學生準備以英語為媒介的數學專業知識與技能。²

數學領域的 **EAP** 有特別的重要性，因為它是理工醫農商管資電學群的專業學習共同語言，而且，國內理工科系的大學教授，

² **EMI** 是「英語作為教學媒介」(**English as a Medium of Instruction**) 的縮寫，用意是在國際學生組成的班級中，以（全）英語授課。**EGP** 和 **EAP** 分別是 **English for General Purposes** 和 **English for Academic Purposes** 的縮寫。

即使不以英語授課也經常直接使用歐美出版的英文教科書，甚至在評量試卷上直接以英文命題。高中數學課程已經為學生準備了所需的數學基礎知識，但是當它們以英文的慣用語句表達時，學生難免一開始感到陌生；如果因此而阻礙了大學階段的學習，就很遺憾了。在高中數學課程中引入 EAP 英文，最主要的目的就是幫助學生銜接大學的英文教材。這本書就是針對我國高中數學內容設計的英文字詞與常用句式教材，可作為此一理念的實踐範例。

■ 利用字源幫助文化脈絡的理解

一個文化最顯著的特徵就是語言，語言／文字的流變，可以幫助理解文化的發展。而數學——如數學領綱的第三項理念——是一種人文素養，宜培養學生的文化美感。英文的數學詞彙經常能提供數學在西方文化脈絡中的角色，而許多數學詞彙譯自英文，所以雙語教學提高了在文化中認識與理解數學的機會，而課綱主張這些脈絡中的知識將會提升數學素養。

舉例而言，有理數 (**rational**) 在普通英文中主要的意思是「合理的，有理性的」，但它本來是 **ratio**「比例」的形容詞，也就是「成比例的」的意思。可見「有理數」來自成比例的兩個正整數，也就是它們的比值。(第 4 課)

再舉一例。對數 **logarithm** 來自拉丁化的兩個希臘字 **logos-arithmos** 的合併，直譯為 **ratio-number**：比例數。取這個名字的原因，可能是因為當初的動機是發現了：如果把等比數列寫成次方形式，則它們的指數會形成等差數列。當 **logarithm** 在明朝末年首次傳入中國時，的確翻譯成「比例數」。當時把 $a = 10^u$ 的數對 (a, u) 「對列成表」，稱為「對數表」，其中 a 稱為「原數」，到了

康熙時代改稱「真數」，而「與 a 相對的數」最後就稱為「 a 的對數」了。(第 19 課)

諸如此類的內容，散布在整本書裡，作為目的(二)的一種實踐範例。

■ 接觸西方教材可望調整數學教育的品味

擴展視野，就是調整品味的契機。雙語教數學之後，教師有更多機會直接閱讀西方的教材與評量試題，學生也有更多機會閱聽西方的教科書或教學影片。大家都開拓了視野，使得大家都有較多的機會，反省我們自己的數學教育現況。

西方的數學教育也有他們自己的文化包袱，因此有他們必須思索的改善方向。我國的數學教育現況，有些地方類似於國際間共同的問題，但是也有我們獨特的狀況。

舉例來說，以下可能是英文教材值得我們學習的特徵：有效運用科技工具(包括 Calculator 和 App)，討論接近真實情境的應用問題，從科學與工程中擷取大量的數學模型作為例題或試題；而且，在初學一項數學物件時，給予學生大量的基礎練習。等到越來越多教師同仁檢驗了英文數學教材與評量的教學成效，而且如果獲得了正面的實徵經驗，我們就有機會做較大規模的討論，在獲得共識的方向上，一起改變。

這本書在篇幅容許的範圍內，也盡量提供調整教學內容與次序的建議。例如書裡多次以程式語言或程式設計作為數學物件的類比，因為計算機科學可能是我國學生最主要的從業領域之一。又如書中提倡三角的學習應以測量與計算為主，學習三角比的同時就反查三角(第 38-40 課)。再如作者認為三角形全等的教學

目標應該從理論證明轉移到三角形的測量與計算（第 42 課）。這些項目，都是來自觀摩西方教材所獲的心得。

華洋模式

前面說的是理念，這本書展示了教材層次的實踐可行性，然而教師該怎麼行動呢？行動的原則性策略，不妨參照林子斌提議的「沃土 (FERTILE)」模式。³「沃土」策略意在上位，並不針對特定學科，數學科的雙語教學也大多可遵循；但凡一體適用的通則，在個別特例上多少需要微調。作者特別要提請商榷的是 I 策略：教學策略 (FERTILE 當中的 I 代表 Instructional Strategies)。

我要指出的關鍵點是：數學（乃至於整個理工學科）教學語言中的中英夾紵是自然的，有時候甚至是必要的，就好像前兩行寫在括弧裡的中英夾紵，它並不是「晶晶體」。數學教學中的中英夾紵，在臺灣的大學數學本科教學中是自然的、常態的，它應該是所有數學系畢業生的共同經驗，所以特別容易轉化為高中課堂的教學語言。作者將此特徵稱為「華洋模式」。

華洋（1945–2023）是數學界的前輩，作者的老師，他非常聰明幽默、多才多藝，曾在中央大學擔任計算機中心主任、數學系主任。中央大學數學系的另三位前輩：王九達、胡門昌、柯慧美，合著一本《微積分講義》。在內容上，這部講義以民國 72 年課程標準《理科數學》的單變數微積分為基礎，延伸而成大學微

³ 林子斌（2021）。建構臺灣「沃土」雙語模式：中等教育階段的現狀與未來發展。《中等教育》，72(1)，6–17。這篇文章附帶一則訊息：風行全國的雙語教學「運動」，可能始於臺北市；當時的柯文哲市長師法新加坡或荷蘭而在臺北市推動教育的政策，在他 2016 年訪問新加坡之後「推動臺北市雙語教育之決心更加明確」。

積分。除了關於教學內容的創新安排以外，這部講義還有語言方面的創新設計，如其引言所述：

本書的語言也有一項特色：在上篇中我們混雜使用中文和英文，愈到後面英文愈多，在下篇則全用英文。我們是主張科學中文化的，但毋庸諱言，我國的科學尚未到達領導地位，大學生以後研讀功課尚須使用英文課本，就業後亦不乏以英文閱讀與撰寫科學文字的需要。培育英文能力，此其時也。因此循序漸進，在大一微積分的課程中，養成其閱讀英文數學書的能力，可免日後的恐慌。

王九達是臺灣數學界耆老，也是華洋的老師。他曾笑稱這部講義的語言設計就是「華洋」：由華入洋。先用華文，慢慢摻入洋文，中英夾敘，最後全用洋文。教學語言的中英夾敘，意圖使英文比例愈來愈大，最終全英文，就是作者所謂的「華洋模式」。

大學本科教育的華洋模式要把學生帶到全英文的境界，但是在中小學並不需要。把時間拉長來看，從小學到高中可以視為「由華入洋」的次第進程，最後能完成在大學就好了。

數學系師生在教學、學習溝通時的中英夾敘，可以理解為日文外來語片假名的升級版——我們不用中文拼寫英文，直接把英文放在中文的語句中使用，彷彿它就是中文的一部份。將此模式轉化為中學的雙語教學，最需要關注的是：發音應盡量正確。並不是要求某個地區的標準口音，而是要求在全球化英語 (Globish) 標準下的正確性。這就是本書在文字之外，特意提供朗讀示範的原因。

華洋模式相容於學科內容與語言整合教學 (CLIL)⁴。整合教學的立論之一，就是共通語（華語）適合用來作專業以外，或者輔助專業的日常溝通，譬如在生活經驗中舉例說明一個數學概念，還是說國語比較方便；而目標語（英語）則適合用來發展精確的專業知識／技能。有一些詞，譬如 **minor** 和「餘子式」，**cofactor** 和「餘因子」，刻意用中文翻譯並不會使它變得更容易了解，何況將來需要用到這些概念時，多半會在英文脈絡中，這時就不如直接用英文，把它們假名化（如第 91 課）。

這本書的寫作，就是中英夾紵之數學書寫的一種展示。

本書使用辦法

在前述理念之下，這套教材以較高觀點統整複習中學以下之數學內容，並以中英夾紵的方式融入學術目的的英文（作者稱之為「華洋模式」）。作者賦予此書多重目的：高中生／準大學生的數學複習與英文預習、職前師資培育、在職教師賦能培力、搭配高中課程的雙語補充讀物，以及數學學習架構的總整。因此，本書的假想讀者包括準備進入數學、科學或工程領域的學生，中學數學的師資生，中學數學教師，以及數學教育領域的同仁。

作者建議如何使用這本書？任何人都可以把它當作參考資料，隨著需求而翻閱；作者刻意縮小這本書，希望提高它的便利性。首先，這本書比照數學課程綱要對於學習內容的分類概念，虛分六章，方便讀者在目次中翻找主題。其次，每課課文皆為對開之兩頁（原則上），讓人一目了然，無須前後翻找。最後，按照

⁴ CLIL 是 Content and Language Integrated Learning 的縮寫，讀成一個字。

中文與英文語用差異而獨立製作的中文索引、英文 **Index**，應該能充當術語詞表的功能，提供另一種使用方式。因為課文皆為二頁，詞條的頁碼通常指向左頁，讀者可自行瀏覽整面。

教師可以搭配教學進度，將此書單篇課文影印給學生，當作數學英文或數學文化的補充讀物。雙頁一面的課文設計，讓教師更方便影印所需的內容。教師同仁應該看得出來：部份課文其實也可以讓國中生閱讀。

根據語言學習專業的建議，語言的學習最忌一曝十寒；最理想的語言學習環境是沉浸於目標語（英語）的環境裡，但我們都知道在臺灣很難實現沉浸的環境。退而求其次，就是穩定的學習節奏：每天適度的練習，保持固定的節奏，不拖延，不躁進。將此書當作教材的學生，不論自學還是修課，都應該秉持「持之以恆」的語言學習原則，每天投入固定時間。

這本書編成 **108** 課，就是為使學生能夠「類似沉浸」在數學英文的學習環境中。作者為每一課提供放聲閱讀的音訊檔案，以一名「數學教師」而非英語教師或母語人士的標準提供讀音示範。每篇的閱聽時間大約 **5** 分鐘，即使反覆練習以及反省思考，應該也可以在 **10** 分鐘內完成。教材提供的資源，足夠連續 **18** 週，每週 **6** 天的持續學習。作者期許學生按此進度：每天一課，不拖延也不躁進，每天投資 **10 - 20** 分鐘，持之以恆地學習，相信都能聚沙成塔，獲得豐富的成效。

最後，作者在整本書裡夾帶了對於數學課程內容與編序的看法。例如 **(1)** 將向量、複數列入「代數」，因為作者主張複數涵蓋平面向量，而複數是從二次方程創造出來的數；**(2)** 整併出「離散數學」一個主題，因為作者認為未來的數學學習內容要有越來越

多的離散數學；(3) 將統計放在機率之前，這是想要把統計當作主要的學習目標，把機率視為統計的語言；(4) 在主題上取消「幾何」，因為作者期望淡化歐氏平面幾何，凸顯空間概念的重要，並且融合歐氏幾何與卡氏幾何（坐標幾何）的學習。各章課文的順序，是作者認為各大主題之理想教學編序，而主題間內容重疊的課文，就是各主題可串接而形成綜合性數學課程的節點。例如在代數主題的「二元一次方程式」指出：因為它是「被兩點唯一決定」的數學物件，所以它就「是」一條直線，在這裡連接平面與空間形體，藉此概念提早引進（並且融合）歐氏和卡氏平面幾何的學習。書裡有許多這方面的伏筆，難以一一列舉，數學教育同仁應該看得出來。

誌謝

受到前述《微積分講義》的啟發，我從 90 學年起嘗試在微積分課程中融入相關的英文教育，期望學生發展自己閱讀英文教科書的能力，因此而陸續製作用中文解釋英文微積分課本的教材。2003 年春季的一天下午，與時任理學院院長的葉永烜院士聊及此事，他替這批教材取了名字：數學英文。

2005 年春季，我獲得中央大學教務處的經費支持，開始「英文與數學協同教學」創新教學計畫。語言中心管冰琛主任支持這項計畫，她引介一些英語教師參與實驗。我的第一位合作伙伴是劉愛萍老師。後來，為了在微積分聯合教學中融入學術導向的英文教育，有更多英語教師加入；我因此與語言中心結緣。潘明蓉老師說這些教育可以造就「英數兩全」的學生。

時間來到 2021 年 9 月，高中數學學科中心的（建國中學）

曾政清老師向我解釋數學教師同仁對於雙語教學任務的關切，或者說焦慮。在 12 月 23 日的學科中心諮詢會議之後，我們具體決定為種子教師做一次先導性的「數學雙語教學工作坊」，並於 2022 年 3 月開課；此工作坊的教材，經過一年的擴編形成了這本書。書稿送交中央大學出版中心之後，李瑞騰主任送我這本書的副標題：脈絡中的數學英文關鍵詞。

書籍不等於教材，教材亦不等於課程。這本書、這套教材與課程的實現，要特別感謝以下同仁：林文淇教授為我擬定課程的實施原則，我的教材是在此課程設計的前提之下撰寫的；李振亞教授支持了一整個學期的課程實驗。中央大學語言中心耿文瑤老師參與了整個工作坊，而且全程投入後續的擴編，她聽過我全部的朗讀錄音，也是英文字詞的教學錄音者；耿老師可謂這份教材的協同教學者。美國加州初級中學數學教師劉澄賢 (Teresa Luo) 答覆我所有課室習慣用語的提問，她是我的主要諮詢對象。中央大學出版中心王怡靜持續推動這本書的寫作，並且從網頁整理出第一批書稿。數學學科中心籌備工作坊期間，匯入了蕭弘玫老師 (Berri Hsiao)、周慧蓮老師、蕭佑玟老師以及陳界山教授的經驗與觀點。儘管如此，這本書若有謬誤，仍是作者本人的責任，並請讀者不吝指教。



單維彰 <https://shann.idv.tw>

國立中央大學師資培育中心、文學院學士班與數學系
民國百十三年三月於臺灣中壢

目次

數與量

- 1 報數 Number 2
- 2 整數 Integer 4
- 3 算術 Arithmetic 6
- 4 有理數 Rational Number 8
- 5 比 Ratio 10
- 6 次方 Power 12
- 7 數線 Number Line 14
- 8 分數與小數 Fraction 16
- 9 分小數互換 Algorithm 18
- 10 實數 Real Number 20
- 11 數系 Number System 22
- 12 運算次序 Precedence 24
- 13 數列 Sequence 26
- 14 有規則的數列 Pattern 28
- 15 級數 Series 30
- 16 概數 Approximation 32
- 17 次方運算 Exponentiation
34

- 18 指數律 Exponent Rules 36

- 19 對數 Logarithm 38

- 20 利息 Interest 40

- 21 財務 Finance 42

- 22 同餘 Modulo 44

- 23 希臘字母 Greeks 46

平面與空間形體

- 24 幾何 Geometry 48

- 25 歐氏幾何 Euclidean
Geometry 50

- 26 空間概念 Spatial Concepts
52

- 27 基本形體 Shapes 54

- 28 基本平面圖形 Plane
Figures 56

- 29 直線 Line 58

- 30 圓 Circle 60

- 31 角 Angle 62

- 32 角量 Degree / Radian 64

- 33 四邊形 Quadrilateral 66
- 34 三角形 Triangle 68
- 35 多邊形 Polygon 70
- 36 對稱 Symmetry 72
- 37 視圖 Projection 74
- 38 相似形 Similar Figures 76
- 39 直角三角形 Right Triangle
78
- 40 正餘弦 Sine and Cosine 80
- 41 外接圓 Circumcircle 82
- 42 三角形的建構 Con-
struction 84
- 43 三角形內心 Incenter 86
- 44 三角形的測量 Sides and
Angles 88
- 45 重心 Center of Mass 90
- 46 平行 Parallelism 92
- 47 平面的法線 Perpen-
dicularity 94
- 48 軌跡 Locus 96
- 49 多面體 Polyhedron 98
- 50 旋轉體 Revolution 100
- 51 圓錐曲線 Conics 102
- 離散數學**
(含集合、邏輯)
- 52 離散數學 Discrete Math
104
- 53 集合 Set 106
- 54 集合建構 Set Builder 108
- 55 集合關係 Set Relation 110
- 56 排列 Permutation 112
- 57 組合 Combination 114
- 58 重複組合 Repetitions 116
- 59 組合的延伸 Binomial 118
- 60 集合運算 Set Operation
120
- 61 命題 Statement 122
- 62 條件命題 Conditional 124
- 63 逆否命題 Contrapositive
126
- 統計與機率**
- 64 描述統計 Description 128
- 65 資料分布 Distribution 130

- 66 資料蒐集 Data Collection
132
- 67 樣本與母體 Population
134
- 68 統計表 Statistical Table
136
- 69 長條圖 Bar Chart 138
- 70 直方圖 Histogram 140
- 71 雙變量分析 Bivariate 142
- 72 可能性 Odds 144
- 73 機率 Probability 146
- 74 事件 Event 148
- 75 機率算則 Probability
Rules 150
- 76 機率樹 Probability Tree
152
- 77 貝斯定理 Bayes' Theorem
154
- 代數
(含坐標幾何、向量、矩陣)
- 78 數學表達式 Expression
156
- 79 方程 Equation with
Unknowns 158
- 80 平面直角坐標系 Co-
ordinates 160
- 81 直線方程式 Line Equation
162
- 82 比例式 Proportion 164
- 83 圓方程式 Circle Equation
166
- 84 聯立方程 System of
Equations 168
- 85 多項式 Polynomial 170
- 86 方程 (式) Polynomial
Equation 172
- 87 二次曲線 Quadratic Curve
174
- 88 三角比 Trigonometry 176
- 89 推廣的三角比 Trigo-
metric Ratio 178
- 90 三角恆等式 Trigo-
metric Identity 180

91 行列式 Determinant 182	101 線型與反比函數 Linear Function 204
92 向量 Vector 184	102 基本函數 Elementary Function 206
93 線性組合 Linear Combination 188	103 三角函數 Trigonometric Function 208
94 行列式運算 Multilinearity 190	104 正弦波 Sinusoid 210
95 矩陣 Matrix 192	105 指對函數 Exponential and Logarithmic Function 212
96 複數 Complex Number 194	106 反函數 Inverse Function 214
97 複數平面 Complex Plane 196	107 無窮 Infinity 216
數學分析 (含基本函數)	108 微積分 Calculus 218
98 函數 Function 198	拼音檢索對照表 220
99 函數的表達 Function Representation 200	索引 221
100 函數運算 Function Operation 202	Index 238

1 報數 Number

英文配合報讀大數的語言習慣，將三位分為一節：separate numbers into groups of three digits，英國和美國使用逗點 (comma) 當作分節符號 (group separator)，但其實國際標準應該使用 thin space (窄空格)。每一節的位值 (place value) 從小到大依序是千 (thousand)、百萬 (million)、十億 (billion)、兆 (trillion)。例如 2021 年 7 月底 (at the end of July, twenty twenty-one)，臺灣人口數是 23,470,663：

twenty-three million, four hundred seventy thousand,
six hundred and sixty-three

其中 and 可省略。可能會寫成概數 23,000,000：twenty-three million，但我們不該轉譯為二百三十萬，轉譯為中文數詞應該說兩千三百萬。

因為中文數詞四位一節與英文三位一節的基本差異，說大數的時候要符合各自文化才有素養。例如日本人口數大約 126,000,000：one hundred twenty six million，要說一億兩千六百萬；中國大陸人口數大約 1,400,000,000：one point four billion，他們可能會說 one point four billion，但我們要說十四億。2021 年政府總預算 2,102,200,000,000 可能會被說成 two trillion one hundred and two point two billion，但我們要說兩兆一千零二十二億。

西元年份一般會兩位兩位地說，例如 2022 年是 year twenty twenty-two，1962 說 nineteen sixty-two，但是 1902 就習慣說

nineteen oh-two。西元 2000 年就說 year two thousand。二十一世紀比較特殊，它的前九年，例如 2003 年習慣說 two thousand three 或 two thousand and three。整百的年份，例如西元 1500 年就說 year fifteen hundred。

英文的數詞分成基數 (cardinal numbers) 與序數 (ordinal numbers) 兩種形式，cardinals 就是 1, 2, 3, 4 等，而 ordinals 是第一、第二、第三、第四等等 (first, second, third, fourth)。用英語報日期時，日期要用序數。例如美國的國慶日在 7 月 4 日 (July fourth 或 fourth of July)，高中的開學日可能在 8 月 31 日 (August thirty-first)。

小數點以下的數值就一位一位的讀，不用 oh 來取代 zero。例如 1.23 讀 one point two three，1.05 讀 one point zero 5。百分比 % 讀 percent，千分比 ‰ 讀 per mill，例如 $0.30\% = 3.0\text{‰}$ ：

Zero point three zero percent is equal to three point zero per mill.

有些歐陸國家(例如德國)用句點 (period) 當作整數的分節符號，用逗點當作小數點，跟英美的習慣恰好相反。閱讀外國數字的時候，要留意這項文化差異。

shann.idv.tw/matheng/number.html



2 整數 Integer

整數是 *integer*，其中 *g* 的發音是 ㄐ 而不是 ㄍ。質數是 *prime* 或者 *prime number*；例如 *3 is a prime*，或者 *2 is the only even prime number*。Even number 是偶數，*odd number* 是奇數的意思。相對於質數的合成數是 *composite number*。Positive 是正，*negative* 是負，例如 *positive integer* 是正整數，*negative integer* 是負整數。自然數 (*natural number*) 只不過是正整數的另一個說法。自然數聯集 0 ，也就是 0 或正整數，英文稱為 *whole number*，譯作「全數」，但我國教科書很少使用這個詞，我們習慣說「非負整數」：*nonnegative integer*（也寫成 *non-negative integer*）。

一個整數的因數是 *factor*，而因數分解就是它的字根變化 *factorize*（動詞）或 *factorization*（名詞），例如 *3 is a factor of 12* 或者 *to factorize 12*，或 *3×4 is a factorization of 12*。但是兩個（或更多個）整數的公因數卻不用 *factor* 這個字，改用 *common divisor*；*common* 是共同的意思，*divisor* 是可整除的數。所以最大公因數是 *greatest common divisor*，簡寫為 *GCD* 或 *gcd*。真因數是 *proper divisor*。兩個正整數互質，就說它們是 *relatively prime*。例如 *12 and 25 are relatively prime*。三個（或更多）數的互質就更複雜一點，例如 *30, 35 and 42 are mutually relatively prime*，但並不 *pairwise* 互質，不是兩兩互質：*they are not pairwise relatively prime*。

倍數是 *multiple*，這是從 *multiply*（乘積）變化來的。公倍數是 *common multiple*，而最小公倍數就是 *least common*

multiple，簡寫為 LCM 或 lcm。

GCD 和 LCM 可以用輾轉相除法計算。這個算法寫在希臘人歐幾里得 (Euclid) 的著作《幾何原本》(Elements) 的第 7 卷第 1 命題，所以西方人稱它為「歐幾里得演算法」：Euclidean algorithm，其中 Euclidean 是 Euclid 的形容詞，即「歐幾里得的」的意思，而 algorithm 是演算法。明朝末年從他的拉丁文姓氏 Eukleides 翻譯成歐幾里得，如今英語通常講「尤」幾里得。



shann.idv.tw/matheng/integer.html

〔續第 7 頁：3 算術〕

算術基本定理 (the fundamental theorem of arithmetic) 是說：如果不理會順序差異 (ignoring the order)，每個大於一的整數 (any integer greater than one) 都可以寫成唯一的質數乘積 (a unique product of prime numbers)。也就是說有唯一的質因數分解：a unique factorization of prime numbers，所以它又稱為唯一分解定理：unique factorization theorem。

3 算術 Arithmetic

四則運算通稱為「算術」，英文是 arithmetic。數學的英文是 mathematics，數學和算術當然不一樣；也要注意 mathematics 看起來像一個複數名詞，但它是單數，例如 mathematics is power。Mathematics 經常被縮寫成 math（美式）或 maths（英式），例如 math is fun，maths is everywhere。做數學的人——數學師或數學家——稱為 mathematician。

四則運算之加減乘除四個算法的名詞分別是：addition（加法）、subtraction（減法）、multiplication（乘法）和 division（除法）。而動詞是：add、subtract、multiply 和 divide。符號 + 是 plus sign，- 是 minus sign，× 是 cross sign，÷ 是 division sign。等號 = 是 equal sign，「等於」是 equals 或 is equal to。強調算出來的結果時，可以說 equals；強調兩者相等時，可以說 is equal to。

英文報讀算式的習慣順序，跟中文有些不同，舉例如下。

1. $6 + 2$: add two to six，也可以說 six plus two，加起來的結果稱為「和」(sum)，例如 the sum of six plus two is eight 或者 six plus two equals eight。
2. $6 - 2$: subtract two from six，也可以說 six minus two，減出來的結果稱為「差」(difference)，例如 the difference is four 或者 the difference equals four。
3. 6×2 : six multiplied by two 或者 multiply six by two，也可以說 six times two，乘出來的結果稱為「積」(product)。

4. $6 \div 2$: six divided by two 或者 divide six by two。如果限定為整數除法 (integer division)，則應該算出一個商 (quotient)，和一個餘 (remainder)；稱為「商」的原因可能是做除法的過程有許多「商量」。這種除法，西方稱為歐幾里得除法 (Euclidean division)。

在 $6 \div 2$ 算式裡，6 是被除數 (dividend)，2 是除數 (divisor)；其中 dividend 也有「紅利」的意思，divisor 也有「因數」的意思。 $6 \div 2$ 恰好會整除：six is evenly divided by two，或者說 six is divisible by two，所以 two is a divisor of six。因為 divide evenly，所以沒有餘數，可以說 remainder is zero，但還是說 no remainder 比較好。再舉幾個例子：

- $6 \div 2 = 3 \dots 0$ 可以說 the quotient of six divided by two is three, no remainder。
- $17 \div 5$ 的商是 3，餘 2：The quotient of seventeen divided by five is three with a remainder of two.
- $19 \div 10$ 的整數除法等於 1 餘 9：The integer division of nineteen divided by ten equals one, the remainder is nine.

除法原理 (Euclidean division lemma) 是說整數除法的各部份有以下關係：

$$\text{被除數} = \text{商} \times \text{除數} + \text{餘數}$$

$$\text{Dividend} = \text{Quotient} \times \text{Divisor} + \text{Remainder}$$

〔請接第 5 頁〕

shann.idv.tw/matheng/arithmetic.html



4 有理數 Rational Number

有理數的英文是 **rational number**。而 **rational** 有「理性」的意思，所以翻譯成有理數。但是這很可惜是個不太妙的翻譯，其實此 **rational** 是從 **ratio** 變化來的，而 **ratio** 是「比」的意思。所以，有理數並沒有「理性的數」的意思，只是說「整數之比」的意思。數，本身沒有理性或非理性之分，只有運用它們的人，才有理性或非理性之分。

分數的英文是 **fraction**。所以 **fractions are rational numbers**。分子是 **numerator**，分母是 **denominator**，注意它們的重音位置。分子分母同除一數（整數）

Divide the numerator and the denominator by a same number (integer) 叫做約分或化簡（動詞：**reduce or simplify**，名詞：**reduction or simplification**）；相反地，分子分母同乘一數（非零的數）叫做擴分，英文似乎沒有專門術語，就講 **multiply the numerator and the denominator by a same (non-zero) number**。

分子分母已經沒有公因數可以化簡的分數，稱為「最簡分數」，叫做 **irreducible fraction** 或者 **fraction in its simplest form**；否則就叫做 **reducible fraction**。化到最簡之後分子與分母各自相等的兩個分數，稱為等值分數 (**equivalent fractions**)，

例如 $\frac{4}{6} = \frac{14}{21}$ 。

真分數是 **proper fraction**，假分數就是 **improper fraction** 了。從英文可以看出來，假分數是 **improper** 也就是「不恰當」的。

(正)分數的「恰當」表示法，是一個非負整數再加一個化到最簡的真分數 (a whole number and an irreducible proper fraction) 簡稱帶分數：mixed number (也有人說 mixed fraction，但這個詞彙不太合邏輯)。除非有特殊需求，當我們說或寫一個分數，就應該是帶分數。

取負數的名詞是 negation，例如 $-(-1)=1$ 基本上就是負負得正的意思：The negation of a negative number is the corresponding positive number。電算器 (calculator) 面板上的 Plus or Minus Key [\pm]，其實是 Negation Key。

倒數是 reciprocal (名詞)，而且每個整數都有「隱形分母」(invisible denominator)，也就是 1，例如 the reciprocal of 5 is $\frac{1}{5}$ 。除以某數等於乘以它的倒數：Dividing by a number is the same as multiplying its reciprocal。

稠密性的英文形容詞是 dense，離散的英文形容詞是 discrete，例如：

Rational numbers are dense, integers are discrete.

最後，分數的唸法是中英相反的。例如 $\frac{2}{3}$ 我們習慣說「三分之二」，也就是先說分母再說分子，但是英語相反，他們習慣說 two over three：先說分子再說分母。

[請接第 15 頁]

shann.idv.tw/matheng/rational.html



5 比 Ratio

在形式上，將兩個或更多個數寫成一串，用冒號 (colon) 連接起來，就是一個「比」(ratio)，例如 1:2 讀作「1 比 2」(one to two)。「比」至少涉及兩個數，三個數的比 (ratio of 3 numbers) 稱為「三連比」，例如 3:4:5 (three to four to five) 是一個三連比 (3-term ratio)。

「比」的功能與分數 (fraction) 很接近，但是「比」有更方便之處，包括

1. 分數的分母不得為零，但「比」無此限制：

The denominator in a fraction cannot be zero.

2. 分數只表達分子、分母兩數的關係，而比可以表達更多數的關係（例如三連比）。

但是「比」的內涵比分數簡單，所以它比較方便，但是它能處理的問題比較少。例如「比」與「比」之間沒有加減乘除的運算，也沒有「大小關係」(comparison)，兩個「比」之間只有一種數學關係：相等或不等。只要將「比」的各數同乘以同一個數，它們都是相等的比 (equivalent ratios)，例如

$$3:6 = 1:2 = 17:34 = k:2k$$

同理

$$3:4:5 = 6:8:10 = 3t:4t:5t$$

在應用情境中，參數 (parameter) k 或 t 通常都是正數，但是在數學上容許它們是負數或零。

當三個量以兩個比或三個比表達它們之間的兩兩關係，可以合併成三連比，這個程序稱為「比的合併」：**combining ratios**。

當「比」只有兩個數時 (**2-term ratio**)，第一個數稱為前項 (**antecedent**)，第二個數稱為後項 (**consequent**)，當後項不為零時，這個「比」有「比值」(**the quotient of the ratio**)，也就是前項 over 後項的分數，英文也說「比值」是「比」的 **fraction form** (分數形式)，這個程序是「將比轉換為分數」：**the conversion of ratio to the fraction**，簡稱為 **ratio to fraction**。三連比或更多數的比，就不能轉換為分數；三連比沒有比值。

「按比例分配」的說法是，例如 **to share 24 units in the ratio 3:2:1**，應該各分配 **12, 8, 4** 單位。

「比」中各數可以帶有不同的單位。地圖或設計圖的「比例尺」(**map scales, drawing scales**) 預設同樣的長度單位，例如「五萬分之一」的地圖記作 **1:50000** 或 $\frac{1}{50000}$ ，意思是(例如)地圖上的 1 公分代表實際的 5 萬公分或 500 公尺，也就是 2 公分代表 1 公里。

長方形的長寬比，例如 **16:9** 常說成 16 乘 9 (**16 by 9**)。

shann.idv.tw/matheng/ratio.html



6 次方 Power

一般說的次方 power，其實是指數運算 exponentiation 的俗稱。在 a^b 裡面， a 是底數 (base)， b 是指數 (exponent 或 index)，正式說法是 a raised to the power of b ，可簡化為 a to the power of b 。當 exponent 是正整數 n 而且 $n > 1$ (n is greater than one) 時，可以用 n 的序數——second, third, fourth, fifth 等——來說指數： a^n 可以說 a to the n -th power，可簡化為 a to the n -th，甚至再縮短為 a to n -th 也可以接受。

但是 a^2 : a to the second 和 a^3 : a to the third 有更習慣說法： a squared 和 a cubed，就好像我們也會通常講 a 平方、 a 立方。Square 是名詞：正方形，squared 是形容詞：平方的。同理 Cube 是名詞：正方體（正立方體），cubed 是形容詞：立方的。例如 $2^2 = 4$ ，two squared is four， $2^3 = 8$ ，two cubed is eight， $2^4 = 16$ ，two to the fourth is sixteen。當 n 並不方便說序數的時候，總是可以回到正式說法，例如 2^{300} 有 91 位數：

Two to the power of three hundred has 91 digits.

當 exponent 不是正整數的時候，就不用序數說法，回到 power 說法。例如 0^{-1} 無定義：Zero to the power of negative one is undefined。對任何非零的 a 和正整數 n (for any nonzero a and positive integer n)， a^{-n} 是 a^n 的倒數： a to the power of negative n is the reciprocal of a to the n -th power。

當 exponent 是單位分數 unit fraction 時——例如 $1/2$ 、 $1/3$ 、 $1/4$ ，對任何正數 a (for any positive a)， a^n 應該要說 the n -th root

of a : a 的 n 次方根。其中 $a^{1/2}$: a 的二次方根 (the second root of a) 習慣說 a 的平方根 (the square root of a) ; 而 the third root 要說 the cube root , 立方根。Square root 是平方根, 在大部分的電腦軟體上, 都縮寫為 sqrt , 而電算器則 $[\sqrt{\quad}]$ 表示。Cube root 是立方根, calculator 如果提供這個計算功能, 通常用 $[\sqrt[3]{\quad}]$ 按鍵, 而它通常可以計算負底數的立方根 : cube roots of negative numbers。這是特例, 一般而言, 我們不討論負數的非整數指數 :

Don't raise negative numbers to non-integer exponents.

這是因為整數指數的次方是用連乘定義的, 但一般指數 b 的次方 a^b 其實是用對數定義的 : 它是 $e^{b \ln a}$ 或者 $\exp(b \ln a)$, 其中 \ln 是自然對數 (natural logarithm) , e 是自然對數的底 ; 因為自然對數的定義域是正數, 故底數 a 不容許為零或負數。

當 $a \geq 0$, a 的 n 次方根也可以理解為 $x^n = a$ 的唯一正數解。負數的次方根沒有一致的定義, 它們的意義會隨情境改變 : depend on context 或者 context dependent 。

當 exponent 是有限小數的時候, 就直接讀出小數。例如 $10^{1.3010} \approx 20$:

Ten to the power of one point three zero one zero is approximately twenty.

[請接第 21 頁]

shann.idv.tw/matheng/power.html



7 數線 Number Line

我們的數線 (number line) 習慣只有一個箭頭 (arrow)，但美國習慣在兩端都畫箭頭。我們用箭頭表示數線的遞增方向 (increasing direction) 或者「正向」(positive direction)，通常是朝右 (to the right)。它攸關三一律 (law of trichotomy 或 trichotomy law)：數線上相異兩點 (two distinct points，其實說 two points 就夠了)，在箭頭那一方的點，通常就是右邊的點 (on the right hand side / on the right)，它代表的數 (the represented number) 比較大 (is greater / is larger)；當然靠左的數就比較小：

Numbers on the left are smaller than the numbers
on the right of the number line.

數線的原點 (origin) 是數線上任一選定的點，代表零 (zero)。數線的單位長 (unit length) 應該要另外指定，不在數線上，然後才用它來畫出代表壹的點：the point that represents one。它從原點朝箭頭方向移動一單位：moves one unit from the origin in the positive direction，或者在原點右邊一單位：one unit to the right of the origin。

沿著數線向右(數線的正向)移動表示加，向左表示減：move right to add, move left to subtract。例如 $2-5$ 意思是 start from the position of 2，或者就說 start from 2，然後 move left 5 units。因為這樣就抵達 -3 ，所以 $2-5=-3$ 。

$a-b$ ：subtract b from a 或者 $b-a$ 的結果都叫做「差」(difference)，但是在日常生活 (daily life) 中，兩數之差 (the

difference between two numbers) 是指它們之間的距離 (distance) : the distance between a and b on the number line (in units), 也就是絕對值 $|a - b|$: the absolute value of $a - b$ 。不論中文還是英文, 都有這種語言上的混淆性。所以, 當要指定有方向性的差時 (signed difference), 一定要說清楚誰減誰。或者用位移 (displacement) 說法較佳, 例如從 5 到 2 的位移 (displacement from 5 to 2) 就很清楚是 $2 - 5$ 。位移是向量 (vector), 而數的正負號 (sign) 就代表了它的方向 (direction)。

一個數的絕對值, 例如 $|a|$ 意思是 $|a - 0|$: It means the distance between a and the origin。對稱於原點的兩個數互為相反數 (opposite numbers), 例如 2 and -2 are opposite numbers。相反數的絕對值相等但異號 : Opposite numbers have the same absolute value but different signs。



shann.idv.tw/matheng/numline.html

[續第 9 頁 : 4 有理數]

當分母大於 2 時, 序數「第三」、「第四」等, 也有單位分數的意思。例如 $1/3$ 是 one third, 但要注意複數, $2/3$ 是 two thirds。同理 $3/4$ 可以說成 three fourths, 但更習慣說 three quarters。但「第二」second 沒有 $1/2$ 的意思, $1/2$ 是 one half, $7/2$ 是 seven halves。如前述, seven halves 是「不當」的說法, 恰當的說法是 three and a half。

8 分數與小數 Fraction

今天作為「分數」的字 **fraction** 原本是「碎片」的意思，引伸為「不足一的部份」，因此是「部份的數」，簡稱「分數」。當一個數帶有「不足一的部份」，應該先說完整的部份，再說不足一的部份；也就是一個整數加或減一個介於 0 與 1 之間的分數，例如

$$3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}, \quad -2\frac{2}{3} = -2 - \frac{2}{3}。$$

可見只需要在 0 與 1 之間討論「不足一的數」就可以了。

既然 **fraction** 表示「不足一的數」，那麼它應該不限於分數，也該包含小數才對啊。沒錯，在 18 世紀的學校裡，分數的英文是 **vulgar fraction**：常用分數，小數的英文是 **decimal fraction**：十進分數，它們都是「不足一的數」，只是形式不同而已。美國從 19 世紀末開始把 **vulgar fraction** 改名為 **common fraction**，這兩個名詞在 20 世紀分庭抗禮。語言朝著簡化的方向演變，到 1980 年之後，**vulgar / common fraction** 簡化為 **fraction**，而 **decimal fraction** 簡化為 **decimal**；這就使得本來是同樣觀念但不同形式的數（不足一的數），在語言上變得好像兩種觀念了。

Decimal 本身是「十進位」的意思，例如 **the decimal system** 就是指我們現在日常使用的十進位記數系統。按照「小數」原本的名字 **decimal fraction** 來看，它就是以 10 的次方為分母的分數，也可以稱為「十分數」。類似地，「二分數」(**dyadic fraction**) 就是以 2 的次方為分母的分數，「三分數」(**ternary fraction**) 是以 3 的次方為分母的分數。例如

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0.375, \text{ 而 } 0.375 \text{ 不過是 } \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{375}{1000}$$

的意思。可見「小數／十分數」是一種特別的分數。

帶有小數的數是 **decimal number**，它的小數部份是 **decimal part**。英國和美國使用句點將整數和小數隔開，稱為小數點 (**decimal point**)，但德國和法國卻用小數逗點 (**decimal comma**)，例如 2,75 是 $2\frac{3}{4}$ 的意思；這時候大數的 **group separator** 反而是句點。有限小數是 **finite decimal**，無窮小數是 **infinite** 或 **non-terminating decimal**。某一類的無窮小數稱為循環小數：**repeating** 或 **recurring** 或 **circulating decimal**。

二分數在計算機上非常重要：二進制小數 (**binary fraction**) 就是分子只能 0 或 1 的二分數。譬如 $\frac{3}{8}$ 是一個二分數，因為

$$\frac{3}{8} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

所以它的二進制小數就是 0.011。十進制的有限小數 (**finite decimal**) 轉換成二進制小數之後，可能變成循環小數。例如

$$0.1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \dots$$

其實 0.1 的二進制小數是 $0.000\overline{11}$ 。

shann.idv.tw/matheng/vulgar.html



9 分小數互換 Algorithm

分數和小數是同一種數，也就是不足一的數 (fractions) 的兩種表達方式。以前不常用小數，是因為只有分數才能算出正確結果，小數經常不精確。但是後來發現分數雖然精確但是難以實踐，小數雖然有誤差但是可以解決實際問題。例如將近二千年前的《九章》有一題答案是 $8\frac{104}{137}$ 元這種金

$$\begin{array}{r} 0.759 \\ 137 \overline{)1040} \\ \underline{959} \\ 810 \\ \underline{685} \\ 1250 \\ \underline{1233} \\ 17 \end{array}$$

額：它雖然正確但是難以支付。幸好後來有了轉換分數為小數 (convert fractions to decimals) 的演算法 (algorithm)，就是我們在小學學過的直式除法／長除法 (long division)，如圖，其中 $\overline{)}$ 稱為除法括號 (division bracket 或 long division symbol)。

分數與小數這兩種表達形式 (expressions) 的轉換，寫成等式 $8\frac{104}{137} = 8.759\dots$ ，其中 \dots (點點點，dot-dot-dot) 是省略號

(ellipsis)，讀作 et cetera 或 and so forth。這個等式可以說成 $8\frac{104}{137}$ 的小數表達 (expressed in decimal form) 是 8.759...。

合社會上出現「角／毛」(dime: 1/10 of a dollar)、「分／毫」(cent: 1/10 of a dime) 這些貨幣，雙方可協議將 $8\frac{104}{137}$ 這種金額，改

為支付 8 元 7 毛 5 分或 8 元 7 毛 6 分 (8 dollars 76 cents)；雖然不精確，但是可執行。

當電算器 (calculator) 提供類似 [$a\frac{b}{c}$] 這樣的功能鍵時，它就可以輸入分數，並且做假分數、帶分數的轉換，以及分數、小數的轉換，其中小數部份當然只能提供大約 8 位小數。

所有分數都可以轉換成小數；當化為最簡分數 (irreducible fraction) 之後的分母僅有 2 和 5 兩種質因數：

There are only prime factors of 2 and 5 in the denominator.

那樣的分數可以轉換成有限小數 (finite decimal)，其他分數都轉換成循環小數 (recurring decimal)。反過來，有限小數和循環小數都可以轉換成分數，但是不循環的無窮小數 (non-terminating and non-recurring decimal) 都不能轉換成分數。例如

$$0.10010000100\dots$$

在小數點下第 1、4、 3^2 、 4^2 、 \dots 位為 1 其他位皆為 0 的無窮小數，不能轉換成分數。

相對於長除法，西方也有短除法 (short division)：其實只是用更多的心算和記憶取代長除法的步驟。如今，短除法通常用在計算兩個正整數的最大公因數或最小公倍數的時候 (find the greatest common divisor using short division)。不論長除法還是短除法，核心步驟都是乘法，這就是為什麼要熟記九九乘法。



shann.idv.tw/matheng/convert.html

10 實數 Real Number

實數 (real number) 是用來測量的數，它的直覺意義就是單位量的倍數。所謂「數與量」其中的數 (number) 本來就是指正整數，而量 (quantity) 其實就是實數。測量的共通模型就是數線：用單位長測量數線上任一點與原點的距離，所得的量就是一個實數，數線上每一點代表一個唯一的量，所有點所對應的量就是所有實數。實數的觀念很古老，但實數這個名稱卻是為了跟虛數——想像的數 (imaginary number)——有所區隔才誕生的。

Real number 跟 rational number 這兩種數的差別，在於實數系具有完備性：Real numbers are complete；意思是說任意一個小數

$$0.a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots$$

都是實數，其中 a_n 表示小數點下第 n 位，它是 $0, 1, 2, \dots, 9$ 之間的任一個數。我們通常把實數的完備性 (the completeness of the real numbers) 視為公設 (axiom) 而不予證明。

有理數是 rational number，相對地，無理數就是「非有理數之實數」的意思，英文是 irrational number；注意有兩個 r 字母。Rational number 沒有理性的意思，irrational number 也沒有不理性或荒謬的意思。

$\sqrt{\quad}$ 和所有像 $\sqrt[3]{\quad}$ 這種開根號的符號，稱為 radical 或 radical symbol。 $\sqrt{2}$ 這種數稱為二的平方根 square root of two，或者簡稱為根號二 root two。如果 n 不是一個完全平方數 perfect

square 或說平方數 square number，則 \sqrt{n} 稱為 surd (不盡根)，
例如：The square root of two is a surd。

電腦語言通常將絕對值 (absolute value) 簡寫成 abs，計算機／電算器 (calculator) 則通常沒有這個按鍵。不是只有分數才能取倒數，無理數也可以作倒數。例如黃金比是唯一等於其倒數加一的正數：

The golden ratio is the only positive number that is equal to its reciprocal plus one.

大於 $>$ 是 be greater than，大於或等於 \geq 是 be greater than or equal to；小於 $<$ 是 be less than，小於或等於 \leq 是 be less than or equal to。注意 be 動詞，例如 $|x| \leq 1$ 等價於 (is equivalent to) $-1 \leq x \leq 1$ ，要以 x 為主詞來說： x is greater than or equal to negative one and less than or equal to one。區間是 interval，開區間稱為 open interval，閉區間稱為 closed interval，而半開或半閉就是 half-open 或 half-closed interval。



shann.idv.tw/matheng/real.html

[續第 13 頁：6 次方]

次方不像乘法和除法，它並沒有演算法 (algorithm)。如果要算正整數指數的次方，只能用連乘去算，而一般指數的次方則幾乎不能筆算。為了日常計算的便利，不妨記憶一些次方，例如 1-20 的平方，1-10 的立方，與 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 。

11 數系 Number System

在臺灣的數學課程裡，數系是指正整數、整數、有理數、實數等類型的數。而「數系」的英文理當是 **number system**。但是，英文 **number system** 更通用的意義是 **numeral system** 的同義詞，意思是「記數系統」或「數字系統」，的確也可以縮寫成「數系」，但是跟數學課說的「數系」是兩回事。中國大陸稱 **numeral system** 為「數制」。

如果要指稱正整數／自然數、整數、有理數等等類型的數，「集合」是正確的數學語言，例如：

令 \mathbb{N} 表示正整數集合。

Let \mathbb{N} be the set of positive integers.

特別要說正整數集合是一個「數系」，言下之意是說它成為一個「系統」，似乎要強調它的某種封閉性 (**closure properties**)。這樣理解也有道理，例如

自然數對加法和乘法運算是封閉的。

Natural numbers are closed under addition and multiplication.

意思是說自然數相加、相乘的結果仍是自然數：

The addition and multiplication of two natural numbers will yield a natural number.

相對地，整數對加、減和乘是封閉的，有理數則對加、減、乘、除都是封閉的，實數也是對加、減、乘、除都封閉。所以，稱自

然數、整數、有理數、實數為「數系」還算有道理，可是稱無理數為數系就沒道理了。因為無理數是從實數集合剔除有理數之後「揀剩的」，所以無理數對任何運算都沒有封閉性：

Irrational numbers are not closed under addition, subtraction, multiplication, and division.

至於「記數系統」則是一套把數寫成數字的符號與規則。例如十進制 (decimal system) 是一種數系或數制，它是以十為底的對位記數系統：

The positional system in base ten.

它使用十個數碼 (ten digits)：0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 搭配位值規則 (place-value notation) 表達任何正整數和有限小數。同理可以定義以二為底的二進制 (binary system)，以及從二進制衍生的八進制 (octal) 和十六進制 (hexadecimal) 記數系統。在很特殊的情況，數學也用三進位數字 (ternary numeral system)。

並不是所有記數系統都是對位的 (positional)，例如羅馬數字就不是對位記數系統：

Roman numerals are not positional.

羅馬數字 I 表示壹，但是 II 並不是拾壹，而是貳。

shann.idv.tw/matheng/numeral.html



12 運算次序 Precedence

像加減乘除次方與方根這些運算稱為 **operations**，它們的符號稱為 **operators**，將它們寫成一條運算的紀錄或指令，稱為算術表達式或算式：**arithmetic expressions**。算式原則上就像一般英文：從左讀到右，例如 $1+2\times 3$ ，但是計算的順序卻未必從左到右，例如前面的算式要先算 2×3 得到 6，再算 $1+6$ 得到 7，這是因為數學規定了運算次序：**order of operation** 或 **operator precedence**。

在一條算式裡，如果有括號就要先算括號內的算式。所謂括號就是小括號 (**parentheses**)，又稱為括弧或圓括號 (**round brackets**)。如果括號有內外層次 (**nested parentheses**)，要依從內而外的順序：

Work outward from the innermost set of parentheses.

不管有幾層括號，程式語言 (**programming language**) 一律寫小括號，但是初等數學文本，也習慣將小括號寫在最內層，向外一層使用中括號 (**brackets**)，又稱為方括號 (**square brackets**)，再外層使用大括號 (**braces**)，又稱為 **curly brackets**。例如

$$\begin{aligned} &(((32-16)\div(2\times 2))-(4-8))+7 \\ &= \{[(32-16)\div(2\times 2)]-(4-8)\}+7=15 \end{aligned}$$

括號必須成對出現 (**in pairs**)，前面的稱為左括號，後面的稱為右括號 (**left parenthesis and right parenthesis**)。括號不成對造成的錯誤稱為 **unbalanced parentheses**。

絕對值符號 $| \cdot |$ 視為括號，它們裡面的算式要先算。

沒有括號時，次方和方根 (powers and roots) 最先算，然後是乘或除，最後才是加或減。科學型電算器 (scientific calculator) 應該都知道這個道理，但是商用電算器或更簡單的款式就可能不知道，它們可能把 $1+2\times 3$ 算成 9。使用前最好先測試一下。

因為「減」就是「加其相反數」，「除」就是「乘其倒數」，所以減的 precedence 應該跟加一樣，除的 precedence 應該跟乘一樣。Precedence 一樣的連續運算，就要看結合性 (associativity)。因為加、乘符合交換律 (commutative) 和結合律 (associative)，所以最安全的作法就是把減全換成加，把除全換成乘，就可以任意調整順序而不至於算錯。例如

$$6 \div 2(1+2) = 6 \times \frac{1}{2} \times (1+2) = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

類似地：

$$6 \div 2 \div 3 = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{6} = 1$$

如果不做以上轉換（減換加、除換乘），就要記得加減和乘除的 associativity 都是左起的 (left-associative)，意思就是必須從左算到右，所以 $6 \div 2(1+2) = 6 \div 2 \times 3$ 從左到右算出 9，而 $6 \div 2 \div 3$ 從左到右算出 1。

〔請接第 27 頁〕

shann.idv.tw/matheng/precedence.html



13 數列 Sequence

Sequence 的原意是指按順序排列的任何物件，在數學裡，它就是按順序排列的數 (a list of numbers that are in order)，稱為數列。就程式語言的觀點而言，sequence 是一種資料結構 (data structure)，即「按照順序而容許重複的編號物件」：

An enumerated collection of objects in which repetitions
are allowed and order matters.

這種資料結構又常稱為序列 (list)。數列的元素 (element) 個數稱為序列的長度 (the length of the sequence)；電腦 (computer) 僅能處理有限數列 (finite-length sequences)，mathematics 可處理無窮數列 (infinite-length sequences)。

數列的編號稱為 index，通常以足標或下標 (subscript) 的形式表現。編號須為按照順序的連續整數 (consecutive integers in order)，在中學通常從 1 開始，但是在大學則通常從 0 開始。編號為 k 的元素稱為第 k 項 (the k -th term)，當我們用 $\langle a_n \rangle$ 表示一個數列時，要另外說明足標 n 的範圍，例如說 $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ 或 $1 \leq n \leq 10$ ，也可以寫 $\langle a_n \rangle_{n=1}^{10}$: a sub n for n goes from one to ten。其中第 3 項寫成 a_3 : a three 或 a sub three。

點點點 ... 稱為刪節號 (ellipsis，這個字很像「橢圓」)，口語溝通的時候，可以略過 ... 不說出來，以短暫停頓取代，也可以說 and so on 或者 et cetera (這是拉丁古語，縮寫成 etc.)。

數列並不一定可以寫成一般項公式 (a formula for the general term)，例如

3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, ...

無法寫成一般項公式。當 **sequence** 具備一般項公式時，例如平方數列 1, 4, 9, 16, ... 可以寫成

$$\langle a_n \rangle, \text{ where } a_n = n^2 \text{ and } n = 1, 2, 3, \dots$$

也可以寫成

$$\langle n^2 \rangle, \text{ where } n = 1, 2, 3, \dots$$

學過集合符號之後，還可以寫

$$\langle n^2 \rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

The sequence of n squared, for n being natural numbers.



shann.idv.tw/matheng/seq.html

[續第 25 頁：12 運算次序]

前面討論的運算都是二元運算 (binary operation)，「負」是單元運算 (unary operation)。它的 precedence 並沒有全球一致的共識；在數學文件裡 $-3^2 = -9$ ，「負」的 precedence 較低，但是某些程式語言卻規定「負」的 precedence 最高，使得 -3^2 被解讀為 $(-3)^2$ 所以等於 9。因此，使用「負」運算要小心它的含糊性 (ambiguity)，應該盡量使用括號以便清楚表達運算的次序。

14 有規則的數列 Pattern

具備一定規則的數列 (sequence of patterns) 應該可以寫出一般項公式 (general term formula)。

等差數列的英文名稱是算術數列 (arithmetic sequence) 或者線型數列 (linear sequence)。首項就是第一項 (the first term)，但是它的 index 不一定是 1，也可能是 0 或其他整數。公差是「共同的差」(common difference)，等差中項就是算術平均數 (arithmetic mean)。等差數列可能遞增 (increasing)，也可能遞減 (decreasing)。等差數列容許公差為 0，也可以有零項 (zero term)。

等差數列稱為線性數列的原因是其一般項公式為 index 的線型函數 $a_n = kn + h$ 其中 k and h are constants。同理，像 2, 6, 12, 20, ... 這樣的數列，它的一般項是 $n^2 + n$ ，所以稱為二次數列 (quadratic sequence)。

等比數列的英文名稱是幾何數列 (geometric sequence 或 geometric progression)。等比數列不容許零項，所以公比 (common ratio) 不得為 0。等比中項就是幾何平均數 (geometric mean)。

遞迴數列 (recursive sequence) 是以遞迴關係定義的數列：

A sequence in which terms are defined recursively.

遞迴數列可能需要一個以上的初始項 (initial terms)。例如著名的費波那契數列 (Fibonacci sequence) F_n 需要兩個初始項：

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ for } n \geq 2 \text{ with } F_0 = 1 \text{ and } F_1 = 1$$

等差與等比數列的一般項公式都同時可以寫成直接形式 (explicit form) 或者遞迴形式 (recursive form)。以等差數列為例，令首項為 a_0 ，公差為 d ：

The explicit general term formula is $a_n = a_0 + n \cdot d$, the recursive formula is $a_n = a_{n-1} + d$ with the initial term a_0 .

直接形式是默認的 (default)，所以通常不必強調 explicit；只要沒聲明 recursive 就是 explicit。



shann.idv.tw/matheng/seqreg.html

[續第 39 頁：19 對數]

- (對數的) 次方律：Log of Power Rule / Power Rule (for logarithms)

$$\log_b a^p = p \times \log_b a$$

根據 $\frac{1}{c} = c^{-1}$ 可以得到 (對數的) 除法律

$$\text{Quotient Rule (for logarithms): } \log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$$

- 換底公式：Change of Base

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

15 級數 Series

將數列依序加起來 (summing up a sequence in order) 的算式 (expression) 稱為級數 (series)，加起來的結果為級數的和 (sum of the series)。Series 是單複數同形的字。前 n 項之和 (sum of the first n terms) 意思是

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{或} \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

用連加符號表達 (expressed by summation notation / Sigma notation)，即

$$\sum_{k=1}^n a_k \quad \text{或} \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

以第二個級數為例，讀作

Summation of a sub k for k goes from zero to n minus one.

雖然符號 Σ 是希臘大寫字母 Sigma，但是讀它都時候要說 summation。

注意級數強調「依序做加法」。但是，有限級數 (finite series) ——有限數列的和：sum of a finite-length sequence——可以調整順序，例如

the summation of the first 100 natural numbers

$1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ is equal to

$$\begin{aligned} & (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51) \\ & = 101 \times 50 = 5050 \end{aligned}$$

但是當級數有無窮多項時——無窮級數 (infinite series)——就不能隨意調整順序。

因為前述觀念上的差異，有限級數通常就說 **sum of the sequence**；當然此處指的是 **finite-length sequence**。相對地，當我們說 **series**，通常就是指 **infinite series**。而無窮級數就不再屬於算術 (arithmetic) 範疇，而屬於分析 (analysis) 範疇了。

前面的連加公式可稱為 **sum of consecutive numbers formula**，但因為 $1+2+3+\cdots+n$ 又稱為第 n 個三角數 **the n -th triangular number**，所以那個求和公式又稱為三角數公式 (**triangular numbers formula**)。另外兩個重要的基本求和公式 (**summation formula**) 是平方和公式 (**the sum of consecutive squares**)、立方和公式 (**the sum of consecutive cubes**)。

無窮級數有其自身的意義，例如

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{與 } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

都可以用來估計 π 的數值，但無窮級數的主要意義還是幂級數 (**power series**) 的函數值：幂級數 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ 定義了一個函數，它的函數值就是一個無窮級數。



shann.idv.tw/matheng/series.html

16 概數 Approximation

不論 rational number 還是 irrational number，當它寫成十進制數字的時候 (the decimal representation for a real number)，經常會有太多位小數 (many nonzero digits after the decimal point)，這時候就需要取概數。取概數或「逼近」的動詞是 approximate，而名詞是 approximation (概數)。取概數的方法有以下三種：

- 四捨五入：round 或 round off

電腦軟體 (程式語言) 通常用 round 當作指令名稱。例如把 $\sqrt{2}$ 四捨五入到小數點下第四位：

Round $\sqrt{2}$ off to the fourth decimal place.

其中 off 可省略。得到 $\sqrt{2} \approx 1.4142$ ：

$\sqrt{2}$ is approximately one point four one four two.

- 無條件進位：carry 或者說 round up

電腦軟體通常用 ceiling 或縮寫的 ceil 當作指令名稱，ceiling 是天花板的意思。例如每半小時計費一次的停車場，會 round up 你的停車時間 to the nearest half hour。

- 無條件捨去：chop 或者說 round down

電腦軟體通常用 floor 當作指令名稱，floor 是地板的意思。

一般而言，小數點下第 k 位就是 the k -th decimal place。但是小數點下前三位通常另外說十分位、百分位、千分位：tenth, hundredth, thousandth。例如在試卷指引上寫

Round all decimals off to the nearest thousandth.

(其中 **off** 可以省略)意思是把所有小數都四捨五入到千分位，整數或分數就不該取概數。相對的，十位、百位、千位是 **tens, hundreds, thousands**。

如果不只針對小數，任何數都要取概數的話，可以用有效位數溝通。例如

Round your answers to three significant digits.

就是要求把答案一律寫成三位有效數字。譬如 72,954 rounded to three significant digits is 73,000。

反過來，問 73,000 有幾個有效數字 (the number of significant figures of 73,000) 是個不恰當的問題，但如果將它寫成科學記號數字 7.30×10^4 就很清楚表示它有三位有效數字。電算器通常用 [EXP] 按鍵輸入科學記號數字。 7.30×10^4 可以按照輸入電算器的程序，簡單說成 7.30 exponent 4。相對於普通記號數字 (decimal notation)，科學記號數字 (scientific notation) 可以明確表示有效位數。科學記號數字 $a \times 10^n$ 當中的係數 a 的學名是 mantissa。

因為取概數而產生的誤差，稱為 rounding error，四捨五入產生的誤差特別說是 round off error 或 roundoff error。



shann.idv.tw/matheng/approx.html

17 次方運算 Exponentiation

次方運算 (exponentiation) 就像加減乘除，是二元運算，也就是把兩個元素 (two operands) 轉換成第三個元素的運算。但是，不像加減乘除這些運算子 (operators) 有習慣的符號，次方卻用上標 (superscript) 的方式，把指數 (exponent) 寫成底數 (base) 的 superscript，就看不到運算符號了。反而程式語言常用 caret 符號 ^ 作為次方運算子 power operator，例如 $2^3=8$ ，讓我們看清「次方」也是一種 binary operation。在 calculator 上，power operator 通常是 $[x^y]$ 按鍵。

次方像減法、除法運算，它們是不可交換的：not commutative。例如 2^3 和 3^2 是不一樣的： $2^3 \neq 3^2$ ：

Two to the power of three is not equal to three to the power of two.

它們也不符合結合律：not associative，例如

$$4^{(3^2)} \neq (4^3)^2$$

Four raised to the power of three squared is not equal to four to the power of three and then squared.

如果不用括號指定運算順序 (order of operation)，則次方運算應該由上而下 top-down。例如

$$4^{3^2} = 4^9 = 26,2144$$

也就是 four to the power of three to the power of two 應該從上面

算下來，先算 3^2 得到 9，再算 4^9 。

不符合結合律的運算，都要規定計算的方向。減和除 (subtraction and division) 是左起的 (left-associative)，意思是說：一個以上的連減或連除，要從左算到右 (start from the left)，例如

$$4-3-2=(4-3)-2 \quad \text{而且} \quad 4\div 3\div 2=(4\div 3)\div 2$$

但是次方是右起的 (right-associative)，意思是說：一個以上的連續次方，從右算到左 (start from the right)，例如

$$4^3^2 = 4^{(3^2)}$$

在符號上，我們規定任何數的 1 次方就是它自己 $a^1 := a$ ，包括 a 是負數或零在內：

The first power of any number is the number itself.

前面的 $:=$ 符號 (colon-equal sign) 的意思是「定義為」，讀作 is defined to be，例如 a to the power of one is defined to be a 。

我們可以推論 1 的任何次方都是 1，記作 $1^u = 1$ ：Any power of one is one。我們也可以推論 0 的任何正數次方都是 0，記作 $0^u = 0$ ：Zero to any positive exponent equals zero。零的負數次方無定義：Negative powers of zero are undefined， 0^0 則是 context dependent 所以不做一般性的定義。



<https://shann.idv.tw/matheng/caret.html>

18 指數律 Exponent Rules

指數律 (exponent rules 或 rules of exponent 或者 laws of exponent) 是關於次方運算的公式。在教材裡，可能會寫出六、七條指數律，但本質上 (essentially) 只有三條 exponent rules。這些公式都必須在符合前提的情況下 (under the premise) 才能使用。前提是：

(以下公式中) 底數 a 、 b 皆為正數。

只有當 (以下公式中) 指數 u 、 v 為整數時，才可以延伸 (extend) 以下公式到非零的底數 (nonzero base)，特別是延伸到負底數 (negative base)。

- 次方乘法律

Multiplication Rule (for powers) 或 Product of Powers Rule

$$a^u \times a^v = a^{u+v}$$

只要引用負指數 (negative exponent) 的定義為取倒數 (take the reciprocal)，就知道這個乘法律其實包含除法律：

Division Rule (for powers) 或 Quotient of Powers Rule

$$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$$

此處的 quotient 不是正整數除法的「商」，而是「分式」的意思。而除法律又包含了零次律：

Zero Exponent Rule

$$a^0 = 1$$

注意我們的前提已經排除了底數為零的情況。

- 次方的次方律

Power of a Power Rule

$$(a^u)^v = a^{u \times v}$$

當指數 v 是整數時，次方律只不過是乘法律的簡單應用；有意思的是非整數指數 (non-integer exponent) 的情況。

- 積的次方律

Power of a Product Rule

$$(a \times b)^u = a^u \times b^u$$

它包含分式的次方律：

Power of a Quotient Rule

$$\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

<https://shann.idv.tw/matheng/exponent.html>



19 對數 Logarithm

對數 **logarithm** 來自兩個拉丁化希臘字 **logos-arithmos** 的合併，直譯為 **ratio-number**，比例數。取這個名字的原因，可能是因為當初的動機是發現了：如果把等比數列寫成次方形式，則它們的指數會形成等差數列。當它在明朝末年首次傳入中國的時候，就翻譯成「比例數」。當時把 $a=10^u$ 的數對 (a,u) 「對列成表」，稱為「對數表」(**logarithm table / table of logarithm**)，其中 a 稱為「原數」，到了康熙時代改稱「真數」，而「與 a 相對的數」最後就稱為「 a 的對數」了，記作 $\log a$ 。例如「與 2 相對的數大約是 0.3010」記作 $\log 2 \approx 0.3010$ 。

在數對 (a,u) 的關係 $a=10^u$ 中，底數 10 也稱為 $\log a$ 的底數。以 10 為底的對數 (**logarithm to the base ten**) 記作 \log_{10} ：把底數 10 寫成 \log 的足標或下標 (**subscript**)。而 $\log_{10} 2$ 讀作 **log base ten of two**。

Logarithm to the base ten 稱為常用對數 **common logarithm**。任何除了一以外的正數 b ，記作 $0 < b \neq 1$ ：

For any number b which is greater than zero but not equal to one.

都可以作為關係式 $a=b^u$ 的底數，而以 b 為底的對數 a ：**log to the base b of a** ，記作 $\log_b a$ ，例如 $\log_2 8 = 3$ ：

Log base two of eight is three.

雖然有很多可能的底數 b ，但通常只用三種底。除了 10 以

外，還有常數 e (建議讀作ㄝ以免跟「壹」混淆)。 \log_e 稱為自然對數 (natural logarithm)，記作 \ln 。符號 \ln 是 natural logarithm 的拉丁文 *logarithmus naturalis* (形容詞放在名詞後面) 的首字母縮寫；它可以簡讀作 L-N 或 long，但其實很多人還是把它讀作 \log 。而常數 e 就稱為自然對數的底 (base of natural logarithms)。最後還有 \log_2 : binary logarithm，近年越來越常用 \lg 表示 \log_2 ，但其實在歷史上， \lg 曾經是 common logarithm \log_{10} 的符號。符號 \lg 建議讀 log base two，或者還是讀 \log 。

對數的形容詞是 logarithmic，例如對數方程是 logarithmic equation。而對數律則是對數等式 logarithmic identities 或者 rules for logarithms。

只要明白 any positive number a 都滿足 $a = 10^{\log a}$ ，就很清楚：對數律只不過是指數律的另一種形式而已。本質上，只有如下三條對數律 (注意，共同的大前提是真數 a 、 c 皆為正數，底數 $0 < b \neq 1$)：

- (對數的) 乘法律：Product Rule (for logarithms)

$$\log_b(a \times c) = \log_b a + \log_b c$$

〔請接第 29 頁〕

<https://shann.idv.tw/matheng/log.html>



20 利息 Interest

儲蓄 (savings) 或借貸 (loan) 的本金是 principal，利息是 interest，利率是 interest rate。利率通常以百分比 (percentage) 的形式呈現，正規金融機構，例如銀行 (bank)、信用合作社 (credit union)、郵局 (post office) 公告的利率都是年利率 (annual rate)。

單利是 simple interest，複利是 compound interest。如果宣告利率是 r 而且採用複利計息，則需指定每年計息次數 (frequency of compounding)，例如郵局一年計息兩次 (稱為 semi-annual)，大多數銀行每年計息十二次 (稱為 monthly)；理論上計息週期 (compound period) 應該是 365 除以計息次數，但實際上未必如此。假如每年計息 n 次，金融界規定每次利率為 $\frac{r}{n}$ 。

在儲蓄情境中，本利和就是 total amount。從計息規則可以推論：本金乘以一個倍率或乘數 (multiplier) 即為本利和。例如以複利存款 T 年後的 multiplier 是

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nT}$$

所謂連續複利 (continuous compounding / continuously compounded) 就是每分每秒每一瞬間都計息；其實連續複利的 multiplier 並沒有非常大 (更沒有「無限大」)，就以存款一年 ($T=1$) 來看：取 $k=n/r$ ，所以

$$\text{multiplier} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \text{ 也就是 } \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{rk} = \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^r$$

不論 k 有多大 (k 不一定是整數), $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ 都不會超過一個常數 (但是當 k 越大就越接近它), 這個常數稱為歐拉數 (Euler number), 記作 e , 而 multiplier 就不會超過 e^r 或記作 $\exp(r)$, 讀作 exponential R。歐拉數 e 也就是自然對數的底, 它是一個無理數, 大約 2.7183。

因為以複利計算時, 一年後的利息超過公告的年利率, 所以相對來說, 公告利率又稱為名目利率 (nominal interest rate), 而實質 / 有效年利率 (annual percentage yield, APY / effective annual rate) 是 $T=1$ 時的 multiplier 減一。討論實質利率時, 應該把通貨膨脹率 (inflation rate) 考慮在內, 但是數學課較少這樣練習。

貸款有兩種: 無擔保品的信用貸款 (credit loan / unsecured loan), 以及有抵押物的貸款 (secured loan); 以房屋或土地等不動產 (real estate) 為抵押的貸款, 特別稱為 mortgage。在借貸的情境中, 借方每年要支付的利息加上各種規費 (fees) 佔貸款本金的百分比, 特別稱為 APR: annual percentage rate。



<https://shann.idv.tw/matheng/interest.html>

21 財務 Finance

財務 (finance) 並不是數學教學內容 (not a teaching topic in mathematics)，但是舉例的時候經常涉及個人的財務。

保險 (insurance) 的保費是 premium。儲蓄型保險是一種年金 (annuity)，它經常用來籌備退休金 (pension)。年金經常是一種定期定額投資 (periodic investment)，投資成效的評估方法之一，是計算其年化報酬率 (annualized rate of return)。而評估的程序，可能要計算投資金額的現值 (present value) 和終值 (future value)，這時候少不了通貨膨脹率 (inflation rate) 的猜測。

分期付款是 payment by installments 或者就說 installment；頭期款稱為 down payment。即使號稱零利率 (interest free) 的分期，它的利息也可能隱藏在一次付清 (pay in full) 的折扣 (discount) 裡。

信用卡 (credit card) 的卡費或其他服務費通常稱為 fee (複數是 fees)，發卡機構是 card issuer，持卡人是 card holder，一旦持卡採購 (purchase) 或者預借現金 (cash advance)，信用卡就開始記帳，帳本內的金額統稱為 balance。所有過了繳款期限 (due date) 而沒繳清的金額，都會變成負債餘額 (debit balance)，持卡人與發卡機構就成為借貸雙方 (creditor-debtor)，相當於 card holder 向 issuer 借錢；借錢當然要付利息。這種情況的 APR 相當高。

所得稅 (income tax) 通常是累進制的：

Income tax is usually progressive.

減去各種扣除額 (deduction) 之後的收入，稱為課稅所得 (taxable income)，落在不同區段 (brackets) 內的課稅所得，以不同的稅率 (tax rate) 計稅。非累進制的稅率稱為單一稅，又稱扁平稅 (flat-rate tax)，例如銷售稅 (sales tax) 通常是單一稅。但小心美國人說的 flat tax 或 flat rate 卻可能是固定金額，而不一定是固定比率。

外國的郵局通常不會兼營儲匯業務 (banking services)，臺灣的郵局可以辦儲金簿 (postal saving) 還可以辦理定期存款——臺灣郵局稱為 time saving，美國的銀行稱為 certificate of deposit，簡稱 CD。郵政儲金是臺灣的獨特現象。



<https://shann.idv.tw/matheng/finance.html>

[續第 47 頁：23 希臘字母]

- 變數 x 的差分 (difference) 或位移，或閉區間 $[a, b]$ 等分割的每段寬度，例如 $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 。

注意 Δ 跟表達三角形 ABC 中的 Δ 應該是不同的符號。

當希臘字母不夠用的時候，數學還會使用希伯來字母 (Hebrew，猶太文) 或西里爾字母 (Cyrillic，俄文)。不過這些情況不會發生在高中數學。

22 同餘 Modulo

最早的同餘運算 (modular arithmetic) 問題出自《孫子算經》的「物不知數」，俗稱為「韓信點兵」；在主流的數學史上，它出自高斯 (Carl Gauss) 在西元 1789 年寫成的劃時代巨著《算術研究》(Disquisitiones Arithmeticae，這是拉丁文，英譯為 Arithmetic Investigations)。

同餘運算已經逐漸移出了中學數學課程，但是它還留在潛課程裡：保存在課外練習與考古題庫裡。

同餘運算的基本觀念是模除 (modulo operation)，它是一種二元運算：當 m 與 n 皆為正整數時，modulo 就是取整數除法的餘數。例如 $14 \bmod 4 = 2$ 是說 14 modulo 4 is equal to 2，其中 modulo 可以讀作 mod。在數學裡，modulo 沒有專屬的算子符號 (operator)，就寫 mod；但是電腦程式語言經常以百分號 % 表示 modulo，例如 $14 \% 4$ 得到 2，此時應將 % 讀作 mod。當 modulo 的兩個運算元素不全是正整數時，例如 $(-14) \% 4$ 或 $14 \% (-4)$ ，它們沒有全球公認的定義，需要先確認它的定義。

但是模除的精彩之處是定義了正整數之間的一種關係：同餘關係 (congruence modulo)。給定一個大於 1 的整數 p ：given an integer $p > 1$ ，用它當作「模」或「模數」(modulus)，則 m 與 n 對 p 同餘記作 $m \equiv n \pmod{p}$ ，讀作 m is congruent to $n \pmod{p}$ ，或者 m is equivalent to $n \pmod{p}$ ，其中 mod 仍然是 modulo 的縮寫，意思是 m 除以 p 和 n 除以 p 的餘數相等，用 modulo operation 表達就是

$$m \bmod p = n \bmod p$$

例如 $14 \equiv 2 \pmod{4}$ 。所謂「韓信點兵」問題就是一元聯立同餘方程 (system of modular equations in one variable)：

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

則 x 之所有可能解是對 105 同餘 23 的正整數：

All possible solutions of x are positive integers equivalent to twenty-three mod one hundred and five.

記作 $x \equiv 23 \pmod{105}$ 也就是 $x = 23 + 105k$ ，其中 k 為正整數或 0。

用短除法 (short division) 做模除的記號如下。以 $26905 \div 7$ 為例，它的短除法記號是

$$7 \overline{) 26^5 9^3 0^2 5^4} \\ \underline{3843}$$

不紀錄商，只寫下每一步驟的餘數，就是模除的短除法，最右側的上標就是模除的結果，也就是 $26905 \bmod 7 = 4$ 。如果電算器有分數功能，則輸入假分數 $\frac{26905}{7}$ 讓它轉換成帶分數 $3843\frac{4}{7}$ 也可以得知 $26905 \div 7$ 的商是 3843 而餘 4。



shann.idv.tw/matheng/modulo.html

23 希臘字母 Greeks

美國、英國、西歐國家通用的字母 A, B, C 等，各國的讀音有些差異，但是字形大致相同，這些字母通稱為拉丁字母或羅馬字母 (Latin alphabet or Roman alphabet)。數學、物理和許多學術領域習慣採用的第二套字母，是希臘字母 (Greek alphabet)，它共有 24 個字母，各有大寫 (uppercase) 和小寫 (lowercase) 兩種形式。前兩個大寫希臘字母跟拉丁字母相同，但是讀音不同：A (alpha)、B (beta)，它們的小寫字母則跟拉丁字母不一樣： α 、 β 。

每個希臘字母都有標準的英文拼音，而且有其對應的拉丁字母：有些希臘字母對應一個拉丁字母，例如第三個、第四個希臘字母的大寫、小寫、拼音和拉丁對應如下表。也有一些希臘字母對應兩個拉丁字母的組合。

Γ	γ	gamma	G
Δ	δ	delta	D

數學和物理使用希臘字母的原則通常是這樣的：先決定一個關鍵字 (德文或法文或英文)，取其第一個拉丁字母作為代表符號；如果那個拉丁字母太常用而容易混淆，就換成對應的希臘字母。

例如圓周率 π 是這樣來的：首先，圓周率來自「周長」perimeter 的第一個字母 P，但是 P 太普通了，十八世紀的重要數學家歐拉 (Euler) 採用以上原則，將它改成拉丁字母 P 所對應的希臘字母 π 。 π 是第 16 個希臘字母，英文拼音是 pi，它的希臘語發音其實像「匹」。但是「匹」跟 P 在語音上難以分辨是說希

臘字母 π 還是說拉丁字母 P。為了彌補這個缺點，英語就將 π 唸成「拍」，跟原本希臘語的發音已經不一樣了。

黃金比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ （另一派人稱它為倒黃金比）習慣記為 ϕ 或

φ ，它們是希臘字母 Φ 的兩種小寫字形，都可以讀作 **fee** 或 **figh**。 Φ 的拼音是 **phi**，對應的拉丁字母是 **F** 或 **Ph**，而 **F** 看來跟黃金比 (**golden ratio**) 沒什麼關係。那是因為，採用這個符號是為了向古希臘雕刻大師菲迪亞斯 (**Phidias**，約 480BC – 430BC) 致敬： Φ 是他的希臘名字的首字母。

數學習慣用小寫希臘字母 θ (**theta**) 表示一個角的度量。我不知道形成這個習慣的歷史原因。

在中學還常見到大寫希臘字母 Δ ，它對應拉丁字母 **D**，有三種常見的意思：

- 二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 的判別式 (**discriminant**)：

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- 方陣的行列式 (**determinant**)；例如

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ 的 } \Delta = ad - bc \text{。}$$

[請接第 43 頁]

<https://shann.idv.tw/matheng/Greeks.html>



拼音檢索對照表

A	ㄚ	237	N	ㄋ	226
Ao	ㄠ	237	Ou	ㄡ	237
B	ㄅ	221	P	ㄆ	222
C	ㄘ	234	Q	ㄑ	229
Ch	ㄔ	232	R	ㄖ	234
D	ㄉ	224	S	ㄙ	235
Er	ㄉ	237	Sh	ㄕ	233
F	ㄈ	223	T	ㄊ	225
G	ㄍ	226	W	ㄨ	236
H	ㄏ	227	X	ㄒ	230
J	ㄐ	228	Y	ㄩ	235
K	ㄎ	227	Yu	ㄩ	237
L	ㄌ	226	Z	ㄗ	234
M	ㄇ	222	Zh	ㄗ	231

索引

- 勺
- 八進制 23
- 不可約／不可分解 186, 207
- 不失一般性 175
- 不偏：見「偏差」
- 不確定性 144
- 巴斯卡 147
- 比／比例 8, 10, 11, 164
 - 三連～ 10
 - ～的合併 11
 - 成～ 60, 138, 182, 191
 - 按～分配 11
 - ～的相等 76, 164
- 比大小（相較）10, 14, 21, 110, 112
- 比例尺 11
- 比例式 164
- 比值 11
- 比率 165
- 包含（於）110
- 半角公式 181
- 必要性 125
- 本利和 40
- 百分比 3, 40, 144
- 百分位數 130, 141
- 伯努利試驗 145
- 貝斯（定理）154
- 表（格）136
- 表面積 79, 99
- 表頭 136, 142
- 保險、保費 42
- 倍數 4
 - 最小公～ 19
- 悖論 109
- 畢氏定理 78, 80, 123
- 畢氏等式：見「三角恆等式」
- 畢達哥拉斯 154
- 博弈 144, 147
- 補角 67, 79, 80, 89, 180
- 標示、標籤 138, 142
- 標準分數 131
- 標準差 131
 - 母體～ 131
 - 樣本～ 135

Index 索引

- 標準誤 135
- 標題 (圖表) 136, 138
- 邊 54, 56, 60, 62, 66, 69, 77, 78
- 邊角關係 82
- 變化率 219
- 變數 162, 169, 172
 - 自、應~ 198
 - ~變換 174
- 變異數 131
- 夕
- 平方、平方根 12, 20, 27
- 平行 59, 92, 97, 163, 186
- 平行四邊形 66, 68, 73, 189, 190
- 平行六面體 98, 190, 195
- 平面 52
 - ~圖形 48, 54, 56
- 平均 28, 128
 - 算術~ 129
- 平移 167, 175, 203, 204, 208
- 判別式 47, 195
- 坡度 177
- 帕普斯 101
- 拋物線 97, 102, 175
- 拋射物 103
- 波形 210
- 波浪符號 (小蚯蚓) 76, 139
- 剖面 79, 101
- 旁心 89
- 配方 166
- 偏差 134
- 排列 104, 112, 114
 - 可重複~ 112
 - 不盡相異物~ 112, 119
- 排序 106, 130, 132
- 排容原理 105
- 普查 134
- 賠率 144
- 譬喻 146
- 冂
- 母線 101, 102
- 母體 (全體) 134
- 矛盾 124
- 命名 107
- 命題 81, 122
 - 條件命題 124
 - 逆~ 126
 - 否~ 127
 - 對偶、逆否~ 127

- 冒號 108
 冒號等於 35, 107
 面 (多面體) 48, 54, 99
 密度函數 90
 滿足 (等式) 159, 162
 模 185, 196
 模型 92, 117, 145, 198, 208, 210
 模除 44
 冪函數 206, 212
 冪級數 31, 218
 默認 29
- 匚
- 分式 161, 206
 分析 (數學~) 31, 104
 分堆分組 119
 分割 43, 105
 分散量數 128, 130, 141, 143
 分期付款 42
 分量 187
 分隔符號 108
 分數 8, 16, 106
 二分數、三分數 16
 約分、擴分、最簡~ 8, 19
 真、假、帶~ 9, 19
 單位~ 12
 分點 (內、外) 91
 反比 165
 反比函數 103, 204
 反交換 191
 反例 127
 反斜線 120
 反導函數 219
 反證法 51, 124
 方向/方向性 76, 184
 方陣 192
 方程 122, 158, 168
 一次~ 158, 164, 168
 二次~ 170, 195
 線性~ 158, 169
 聯立~ 158, 168, 162, 173, 182
 方程式 169, 172, 200
 二元二次~ 103, 201
 ~圖形 96, 162, 169, 173
 否、非 127
 否證 127
 法線 94
 非負 184, 206
 非負整數 (全數) 4, 9, 136
 ~解 117

Index

A

- absolute value 15, 20, 24, 120
- abstract 126, 170, 198
- acute angle 62
- adjacent side 67, 176
- algebra / algebraic 104, 156, 158, 169, 172, 194, 200, 206
- algebraic function 207
- algorithm 5, 18, 20
- α (alpha) 46
- alternate angles 97
- alternating 191
- alternating current 210
- ambiguity 129
- amplitude 210
- analysis (mathematical) 31, 104
- angle 52, 62, 78, 178
 - arms, vertex 62, 179
 - at the center / circumference 61
 - bisector 67, 68, 72, 86
 - central / inscribed 61, 62, 83, 138, 176
 - common, special 177
 - coterminal 179, 196
 - directed / signed 71, 167, 178, 197
 - elevation 167
 - inclination 167, 177
 - measure 62
 - opposite 52, 78, 83, 180
 - reflex, convex 63
 - standard position 179, 184
 - terminal side 62, 179, 184, 196
 - vertical 52
- angular frequency 210
- annuity 42
- annulus 61, 101
- anticommutative 191
- antiderivative 219
- apex 68, 98, 102
- Apollonius of Perga 102
- approach 216

- approximation 32
 APR, APY 41
 Arabic numeral 178
 arc 56, 61
 arccos 81
 arcsin 81, 89
 arctan 77, 88
 Archimedes 99
 arithmetic 6, 156
 argument 123, 196
 arrow 185
 associativity (left, right) 25, 34, 35
 asterisk 156
 asymptote 209
 attribute 119, 130
 average 128
 axiom 20, 50, 52
 axioms of equality 159
 axis 68, 72, 100, 102
 horizontal, vertical 138, 142, 163, 197
 major, minor, semi- 103
- B**
- backslash 120
 backward 184, 189
 ball 48, 53, 54, 77, 100
 bar chart 138
 compound: grouped, stacked 139
 base 29, 34, 38, 48, 55, 67, 68, 78, 88, 97, 98, 176
 Bayes (theorem) 154
 belong-to 109, 110
 Bernoulli trial 145
 β (beta) 46
 betting 144
 bias 134
 bijection 214
 bijective proof 105
 binomial 118, 171
 coefficient 119
 bit 112
 bivariate 142, 199
 bivariate analysis 142, 145
 blackboard-bold (font) 109
 boldface 185
 box plot 141
 box-and-whisker diagram 141
 braces 24, 106
 brackets, round / square / curly 24
 byte 112
- C**
- © 108
 calculate 218

Index 索引

- calculator 9, 13, 19, 20, 25
- calculus 198, 206, 218
- caption 136
- cardinal number 3
- cardinality 120
- caret 34
- Cartesian coordinates 138, 160
- Cartesian product 120
- cell (table) 136
- census 134
- central tendency, measure of
128, 141
- centroid / center of mass 90
- chord 60, 103, 178
 - table of 178, 201
- circle 53, 56, 60, 96
 - equation 166
 - sector, segment 61, 100
 - unit 178
- circumcenter 82
- circumcircle 82
- circumference 60
- clockwise 178
- closure properties 22
- closed 111
 - shape 56, 100
- C_r^n 115
- codomain 199, 214
- coefficient 159, 161, 162, 170,
206
- collinear 53, 62
- colon 108
- colon-equal sign 35, 107
- column 136, 187, 190, 192
- combination 104, 114
 - into bins 119
 - repetition 116
- combinatorial, combinatorics
104, 114
 - enumerative 105
 - number 115
- common notion 50
- common perpendicular 93
- commutative 25, 34, 203
- comparison 11, 14, 21, 110, 112
- compass 60
- complement 120
 - relative 120
- complementary angle 80, 102,
176, 180
- completeness (real) 20
- completing the square 166
- complex number 108, 194
- complex plane 196
- component 187, 188
- composite number 4
- computer algebra system 181
- computer science 106

- concave 54, 57, 98
 conclusion 123, 124, 126
 condition
 sufficient, necessary 93, 124
 cone 54, 100
 aperture 102
 double 102
 confidence level 135
 congruent 62, 84
 conic section / conics 96, 102,
 174, 186
 conjugate 194
 constant 83, 90, 157, 162, 165,
 171, 203, 204
 consecutive 31
 angles 93
 containment (sets) 110
 context dependent 13, 35
 contingency table 142
 continuous compounding 40
 contradiction 124
 contrived example 133
 convergent 216
 convex 54, 57, 63, 70, 98
 convexity 100
 coordinates: see *Cartesian*
 coplanar 92
 corollary 51
 correlation 143
 coefficient 143, 145
 linearly related 143
 negative/inverse 143
 positive/direct 143
 corresponding angles 97
 cosine 80, 85, 176, 178, 208
 direction 184
 cot 176
 count 132
 tally 132
 counterclockwise 178, 209
 counterexample 127
 counting principle 105
 rule of sum / product 105
 Cramer's rule 183
 cross 121
 cross section 79, 101
 csc 176
 cube, cuboid 48, 55, 95, 98
 curve 49
 best fit 143
 cylinder 54, 100
- D**
- data, datum 128, 132
 bin / bucket / class 137
 bivariate 142
 category 138, 142
 class midpoint 137