

## 1 因數與質數

只要能做「整除」就能學習因數，而且小學已經教過因數、倍數、質數，所以這是最理想的國小、國中銜接點。為什麼要學因數？因為國中以上的數學學習經常需要使用分數，而分數加減前的擴分與通分（以後再複習）、分數運算後的約分化簡，以及以後經常用到的等比例化簡、方程式化簡，乃至於八年級的平方根化簡，全都需要使用因數。所以「因數」是準備學習國中數學的關鍵技術。

「因數」是一個標題，它同時帶出「倍數」、「質數」、「質因數」這些名詞，和「分解」這個動詞。看起來好像一次要學很多新東西，但它們只是「國文」而已：它們的數學觀念只有一個，就是「整除」，其他只是國文的新詞罷了。

快速心算簡單的除法——除以 2、3、5、7 的心算——確實很有用；如果同學還不能快速心算，只要知道怎麼算就好，從現在起多多練習，將來自然會變快。

### 長除法與短除法

所謂整除就是沒有餘數的除法計算：例如  $21 \div 5 = 4 \dots 1$  因為餘 1 所以 21 不被 5 整除，或者說 5 不整除 21；而  $21 \div 3 = 7$  餘 0 就省略不寫了，所以 21 被 3 整除，或者說 3 整除 21。

被除數較大時，我們用直式除法，又稱為長除法。假設同學們都會用長除法計算  $2357 \div 5$ ，就不複習了。但這時候可以多學一個短除法。以下是  $2357 \div 5$  的短除法連環畫，把每一步驟的商寫在下方，餘寫在右上角：

$$\begin{array}{cccc} 5 \overline{)2357} & 5 \overline{)23^357} & 5 \overline{)23^35^07} & 5 \overline{)23^35^07^2} \\ & 4 & 4 \ 7 & 4 \ 7 \ 1 \end{array}$$

算完之後，寫在下方的是商，最右邊的右上角是餘數，也就是  $2357 \div 5 = 471 \dots 2$ 。其實短除法的步驟跟直式除法一樣，只是把比較多的數字記在心裡，沒寫出來而已

### [隨堂練習 1]

試用短除法計算  $2357 \div 3$ 、 $2357 \div 7$ 、 $2357 \div 8$ 。

### 因數與倍數

一旦發生整除，除數與商就是「一對」因數。例如  $21 \div 3 = 7$  就知道 3 整除 21，同時也知道 7 整除 21（不信試試看  $21 \div 7$  也整除），不僅 3 是 21 的因數，7 也是 21 的因數，簡單說 (3, 7) 是 21 的一對因數。同理，例如  $72 \div 9 = 8$  所以 (8, 9) 是 72 的一對因數。

因數反過來的說法是倍數。例如 3 是 21 的因數，就說 21 是 3 的倍數；8 是 72 的因數，72 是 8 的倍數。因數、倍數的關係，就像小於、大於的關係，是同一種關係的兩種說法。例如「3 小於 8」只是「8 大於 3」的另一種說法。這裡好像是在國文學習「換個說法」。

至於 (3, 7) 是 21 的一對因數，反過來就說 21 分解成 3 和 7，或者說 21 的一對因數分解是 (3, 7)，記作  $21 = 3 \times 7$ 。注意，我們在小學總是寫  $3 \times 7 = 21$ ，意思是 3 乘以 7 得到 21，但是國中以後常常會寫  $21 = 3 \times 7$ ，意思是 21 分解成 3 和 7。

其實我們很少需要一個數的「全部」因數，但是數學老師總是要考我們全部因數，所以只好學一下。找出全部因數的系統性算法是：從 1 開始，依序嘗試可否整除？如果可以，就分解成

一對因數，把它們一前一後記下來，直到「重複」就可以停下來。例如要找 21 的全部因數，先分解  $21 = 1 \times 21$ ，記下

1,                    21

然後嘗試 2 不整除 21，跳過；3 整除 21，分解成  $21 = 3 \times 7$ ，記下

1, 3,                    7, 21

然後嘗試 4, 5, 6 都不整除 21，把它們都跳過；然後 7 整除 21，但是 7 已經記下來了，這就是「重複」，可以停下來。因此得知 21 的全部因數依序為 1, 3, 7, 21。

### [隨堂練習 2]

請列出 36、54 的全部因數。

有些過時的講義、測驗卷要求同學把「負因數」也列出來，還說因數有「正負」兩種。不要理會那些話，它們教的不對。而且，數學也沒有所謂分數的因數、小數的因數，例如 3.14 和  $\frac{2}{3}$  都沒有因數，數學不討論它們的因數。

### 質數

同學在前面應該已經注意到，對任何可以討論因數的數（以後稱它們為無號整數），1 和它自己永遠是一對因數。只有這一對因數的數，就稱為質數，有些人說素數，清朝時說「數根」。例如 2 只有 (1, 2) 這一對因數，所以 2 是質數。同理 3 也只有 (1, 3) 這一對因數，所以 3 是質數。但 4 就不只 (1, 4)，還有 (2, 2) 這一對因數，所以 4 不是質數；不是質數的數，另一個說法就說它是合數；這裡又是國文而非數學。

質數簡單說是「不可分解」的整數，將來在約分、化簡的時候很管用。有很多數學的科普、故事都跟質數有關，現在世界上最著名的兩個數學「未解之謎」也都關於質數，所以學習質數不但很實用，也能加強文化素養。

雖然 1 只有 (1, 1) 這一對因數，但是為了將來溝通上的方便，數學「規定」1 不是質數，也不是合數；總之只對大於 1 的數討論質數或合數。所以最小的質數就是 2，而 2 也是唯一的偶質數——因為比 2 大的偶數都至少有 (1, 全) 以外的另一對因數 (2, 半)，例如 6 有 (2, 3)，8 有 (2, 4)，10 有 (2, 5)。

很容易檢查：10 以下的全部質數是 2, 3, 5, 7。

怎樣列出 11—100 的全部質數？所有課本都使用「劃去法」，就是先把 11—100 全部列出來，就像

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

...

91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

然後劃掉 2、3、5、7 的倍數，就像

11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~

...

~~91~~ ~~92~~ ~~93~~ 94 95 96 97 98 99 100

剩下的數，就都是質數了；因為，在劃去 2、3、5、7 倍數時，也劃去了 4、6、8、9、10 的倍數，所以剩下的數假如還有 (1, 全) 以外的另一對因數，則兩個因數必須都大於 10，但這不可能，因為那一對因數相乘就超過 100 了。所以，劃剩下的就都是 11—100 之間的質數。

### [課堂活動]

列出 40 以下所有質數。背起來。

同理，同學可以列出 101—200 全部的數，劃去 15 以內質數 2, 3, 5, 7, 11, 13 的倍數，剩下的全都是 101—200 之間的質數。但我並不要求同學都這樣做，有興趣的人自己玩玩就好。照這樣做下去，可以找出「全部」質數嗎？不能。因為質數有「無窮多個」，永遠找不完。論證「質數有無窮多個」是古希臘哲學的第一個成就，它也是最古老的一則數學故事。

怎樣檢查一個數是不是質數？根據前面「劃去法」的經驗，只要檢查比它小、自乘又不超過它的質數就好了：如果這些質數全都不能整除它，它就是質數，否則它是合數。例如想要檢查 57 是不是質數？前面已經知道：對於 11—100 之間的數，只要檢查 2, 3, 5, 7 這些質數就好了，而且偶數就一定不是質數，只要對奇數檢查 3, 5, 7 就好了。依序檢查：3 整除 57，所以 57 不是質數。再如 59，明顯不是 5 的倍數，依序檢查  $59 \div 3 = 19 \dots 2$ 、 $59 \div 7 = 8 \dots 3$  都不整除，所以 59 是質數。

再以 129 舉例，它明顯不是 2、5 的倍數，檢查  $129 \div 3 = 43$  整除了，所以 129 不是質數。而對 127 則檢查  $127 \div 3 = 42 \dots 1$ 、 $127 \div 7 = 18 \dots 1$ 、 $127 \div 11 = 11 \dots 6$  都不整除，至於 13，因為它自乘  $13 \times 13 = 169$  超過 127 所以不必再檢查下去，可以判定 127 是質數。

### [隨堂練習 3]

試判斷 171、173 是不是質數。

最後再學一個國文：因數而且是質數，就稱為質因數。例如 (3, 12) 是 36 的一對因數，其中 3 是質數，12 不是，所以 3 是 36 的質因數，但 12 就只是 36 的因數而不是質因數。

### 隨喜練習

列出以下各數的全部因數，然後列出它的全部質因數。（記得 1 不是質數）

- (1) 45
- (2) 64
- (3) 175
- (4) 220
- (5) 284