

1 因數與質數〔教學說明〕

教學目標

特別選此主題做為迎接國中新生的第一課，主要目標是溫故知新，和緩銜接；此外，如果國小數學曾受挫折，此時希望能重建信心。【關鍵的先備知識只有「整除」。如果不能做除以一位數的除法，特別是如果不能做除以 2, 3, 5, 7 的除法，則必須課外補救。其他不夠熟練者，可以在課間給予關注，使其逐漸熟練。】

知

- 把小學「整除」觀念延伸到分解、因數、倍數、質數、質因數等詞彙。
- 數學「規定」1 不是質數。最小的質數是 2；而且 2 是唯一的偶質數。

行

- 能做一個除式的短除法。
- 能記憶 40 以內全部質數。
- 能列出 300 以內正整數的全部因數。
- 能判斷 200 以內正整數是否為質數。

識

- 最好能了解為什麼要學習因數與倍數。
- 明白數學不討論無號整數以外的因數課題。（學生還不知道「無號整數」，教師需舉例說明）

主要設計理念

1. 為了後來要使用的（擴充）短除法，提前介紹一個除式的短除法，降低未來的學習坡度。
2. 因為一次整除就能發現兩個因數，而且這個觀念可以簡化「列出全部因數」的程序，所以用「一對因數」來教學。
3. 把「倍數」當作國文的修辭來教。同理，也把「合數」、「質因數」當作國文來教。這裡要強調的是它們的「溝通」價值。教師應該在平常口語、書面的溝通中說、寫它們，希望學生自然學到聽、說、寫它們，但不要把它們當作數學「定義」來考學生。
4. 大部分老師都會操作「百數表／劃去法」，此方法有更積極的意義，它可以用來具體展示質數判斷演算法。學生此時還沒學「平方根」，所以我們用「自乘」來溝通。

教學備忘

1. 教師應該要教「合數」，但這個名詞真的很少用，不必太強調它。
2. 將來熟練質數的機會還很多，此時真的不要躁進，只要專注在 2、3、5、7 就可以了。對於行有餘力的班級，可以適度加入 11、13、17。
3. 背誦 40 以內的質數經常有用。教師可分兩段驗收，先記憶 20 以內，再擴充到 40。對於性向不適合的學生，也可以降低要求到 20 以內的質數。
4. 順便說，其實背誦 11—20 的平方也很管用；對部份學生可降低要求到 16 以內的平方。

5. 隨喜練習之中的 220 和 284 是最小的一對「友愛數」：它們的「真因數」之和等於對方。內文沒教「真因數」，可以趁此機會告知學生這個名詞。

教學素養

● 為什麼 1 不是質數

在西歐語言中，意思是「一」的那個字，早期並不是數字，而是不定冠詞、代名詞（例如 **You are the one**），也是「單位」的意思：**the one** 同義於 **the unit**。自從古希臘以來，「數」來自於依據給定單位（**the one**）測量某個量所得的倍數，而單位本身不必測量，或者恰好等於單位的量也稱為單位。所以，在他們的語言裡，「一」根本不是數。既然不是數，當然就不是質數。歐洲的數學觀念逐漸演化，雖然在 16 世紀後期已經把「一」當作數了，但是質數觀念更古老（來自古希臘），所以「一不是質數」這個古老觀念早就成為傳統，一直保存至今。清朝末年傳入「質數」觀念，將它翻譯成中文——最初譯為「數根」，可惜這個可愛的翻譯沒有流傳下來——保存了西方傳統的定義。

● 因數與質數其實是無號整數

我們通常說「只做正整數的因數」與「只對大於 1 的正整數討論質數」，這些說法其實不盡正確。其實在討論因數、質數的時候，不論在數學史上還是學生的認知發展上，都沒有「負數」。既然沒有「負數」，當然也沒有「正數」。「正負」就像「上下」、「前後」、「左右」、「陰陽」，必須成對發生。沒有「正負」觀念的數，正式名稱是無號數 (**unsigned numbers**)。其實：因數、質數等數論 (**number theory**) 觀念，是在無號整數中討論的。將來應用的時候，確實可以討論因數或質數的負倍數，或無理倍數，那些都是推廣或應用，並不是因數或質數的本質。本質上，數學只在無號整數中討論因數與質數。

如果能讓學生提早具備「無號整數」概念，對於未來學習計算機程式語言 (**programming language**) 將會非常有幫助。但是此概念不適合這時候講，適合在學習「正負」的時候講。目前，教師的職責是避免觀念的混淆，只要別在教因數與質數的時候扯到正負就行了。

● 質數「未解之謎」

文本說「世界上最著名的兩個數學『未解之謎』也都關於質數」，是指以下兩個問題。第一：孿生質數猜想。這可能是世界上最古老的未解的數學問題。連續兩個奇數若皆為質數，稱為一對孿生質數，例如 (3, 5)、(17, 19)、(101, 103) 都是孿生質數。此猜想是「孿生質數有無窮多對」，數學家都相信它是對的，但是還不能證明。

第二個未解之謎是哥德巴赫猜想：「大於 7 的偶數等於兩相異質數的和」。例如 $8=3+5$ 、 $10=3+7$ 、 $12=5+7$ 、 $14=3+11$ 等。窮盡目前的電腦計算能力，還沒有找到反例，所以大多數學家相信它是對的，可是還沒有人能證明。

很多數學情節的小說、電影提到這兩個「未解之謎」。了解質數，將提高欣賞前述藝術創作的樂趣。