

2 數線

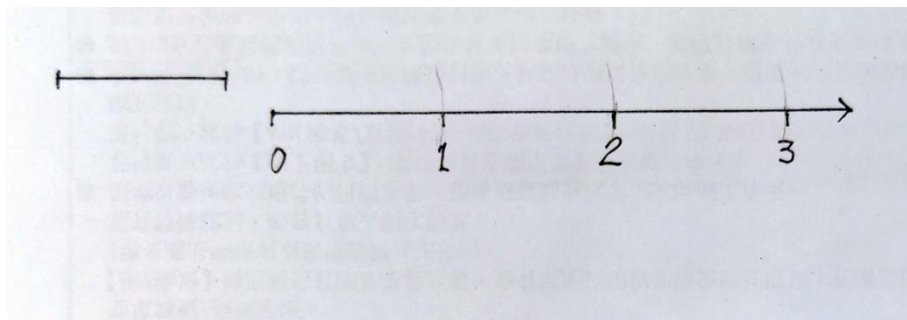
我想要為國中小同學補充大多教科書沒有好好解釋的「數線」。數線為什麼重要？因為數線是一把數學的尺，數學家用它丈量全世界；學習數學，很大一部份就在學習了解這把尺、使用這把尺。所以，學生必須好好認識這把尺。六或七年級是正式認識數線的適當時機，不過任何時候都可以預習或複習。

單位長不在數線上

第一個關鍵是：單位不在數線上。數線是一條線段，可以畫長一點或縮短一點，但單位長是另一個固定長度的線段，不容許改變。就好比如果我們用「吋」做測量單位，就不能隨意改變「吋」的長度。在學校裡，課本或老師可以指定單位長，引導同學們學習；在社會裡，單位通常是公會或政府決定的。

現在，全世界都習慣把數線畫成水平線，令左端為射線的端點，標記它的刻度為 0，在右端畫上箭頭，表示右邊比較大（沒辦法，這個世界右撇子佔多數）。有些人說數線的箭頭表示它無限延伸，那就沒說到重點。

我們用以下程序在數線上劃出第一組刻度。把圓規的針尖和筆尖對準單位線段的兩端點，鎖緊圓規，所以它的針和筆之間的距離就是單位長。針刺在 0，圓弧（不需要畫整個圓）與數線之交點劃出刻度 1。然後針刺在 1，圓弧在 1 的右側（大的那一側）劃出刻度 2。然後針刺在 2，劃出 3，依樣畫刻度，如圖一。



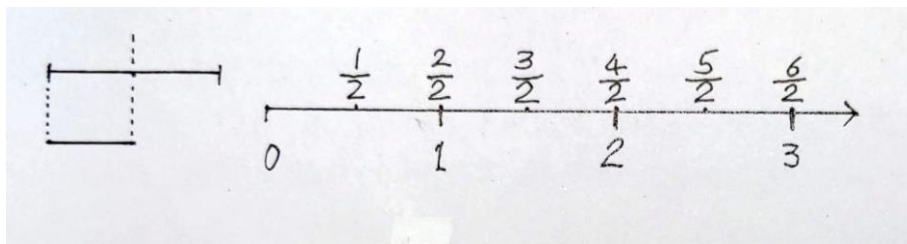
〔圖一〕

什麼是「數」？數就是數線上的刻度。以後會更精確地說它們是「實數」，但平常說「數」就可以了。用完整單位劃出的刻度 1、2、3 等，叫做整數。一把只有整數刻度的尺，顯然簿怎麼夠用，數線上還有其他刻度。

分數

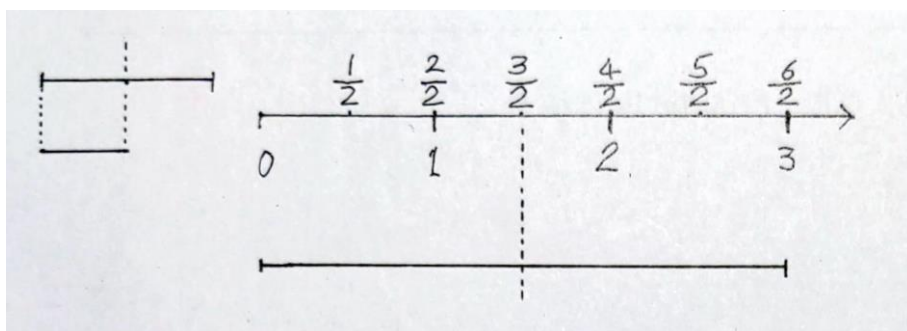
例如，把單位線段平分兩段，也就是兩段一單位。我們把圓規的針筆距離調整成一段長，把針刺在 0 劃出的刻度寫 $\frac{1}{2}$ ，說「二分之一」；把針刺在 $\frac{1}{2}$ 劃出的刻度寫 $\frac{2}{2}$ ，說「二分之二」；依樣畫刻度，劃出的第三、第四、第五個刻度依序寫 $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$ 等；這些用二等分單位劃出來的刻度叫做「二分數」，如圖二。其中 $\frac{3}{2}$ 說「二分之三」。

從圖二看出來 $\frac{2}{2}$ 和 1 是同一刻度， $\frac{4}{2}$ 和 2 是同一刻度。這是因為兩段半單位就是一整個單位，四段半單位就是兩整個單位。所以數學說 $\frac{2}{2}=1$ 、 $\frac{4}{2}=2$ 、 $\frac{6}{2}=3$ 。



〔圖二〕

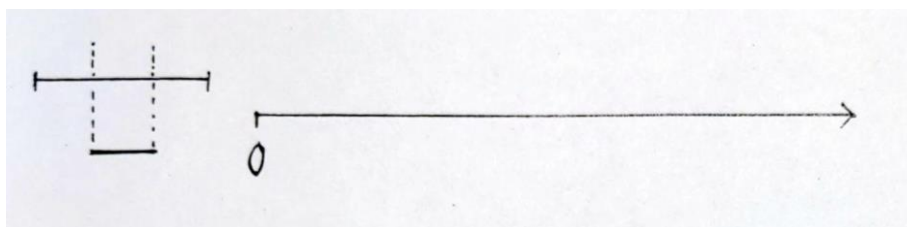
同學可能記得： $\frac{3}{2}$ 的意義是 3 的一半。沒錯：數本來是數線上刻度，但它可以輕易搖身一變成長度，就是從 0 到刻度的線段長。例如從 0 到 3 的線段長度是 3，而刻度 $\frac{3}{2}$ 恰好在這個線段的正中央——它跟 0 距離三段，跟 3 也距離三段——所以它把長度為 3 的線段平分兩半，每半的長度是 $\frac{3}{2}$ ，而刻度 $\frac{3}{2}$ 又搖身一變為長度 $\frac{3}{2}$ 。如圖三。這一段話是希望同學放心：雖然「數」的本意是數線上的刻度，但是它可以引伸或變化來解釋以前學過的所有關於數的知識，不會發生錯誤。



〔圖三〕

[隨堂練習 1]

圖四把單位線段平分三段，請用其中一段，在數線上劃出「三分數」 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{4}{3}$ 、 $\frac{5}{3}$ 、... $\frac{9}{3}$ 的刻度，並且標示刻度 1, 2, 3。

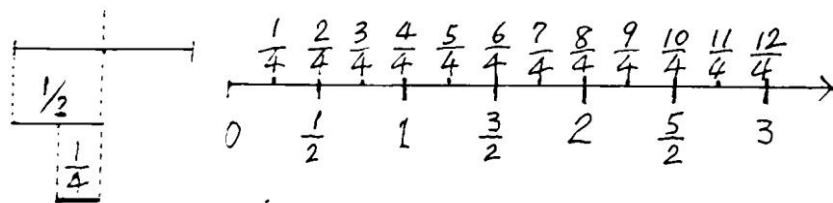


〔圖四〕

等值分數

參照圖五：把 $\frac{1}{2}$ 單位再平分兩段，相當於把單位長等分四段，每段就是 $\frac{1}{4}$ 單位。用 $\frac{1}{4}$ 單位依序在數線上劃刻度，就依序劃出「四分數」 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{4}$ 、 $\frac{5}{4}$ 、 $\frac{6}{4}$... 這些刻度。我們看到 $\frac{2}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$

重合， $\frac{4}{4}$ 和 1 重合， $\frac{6}{4}$ 和 $\frac{3}{2}$ 重合， $\frac{8}{4}$ 和 2 重合。這是因為 $\frac{1}{4}$ 單位是把 $\frac{1}{2}$ 再平分，所以兩段 $\frac{1}{4}$ 就是一段 $\frac{1}{2}$ 。所以數學會說 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{4}{4} = 1$ ， $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ， $\frac{8}{4} = 2$ ，...



〔圖五〕

數學「規定」分母是 1 的分數就是分子。所以 $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$... 就是 1, 2, 3, 4 ...。在這個規定之下，所有整數也都是分數了：它們是分母為 1 的分數。所以，像

$$\frac{2}{2} = \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$$

這樣一組一組互相相等的數，就叫做等值分數：它們雖然表面上看起來不同，但是它們是數線上相同的刻度，所以它們是相等的數。

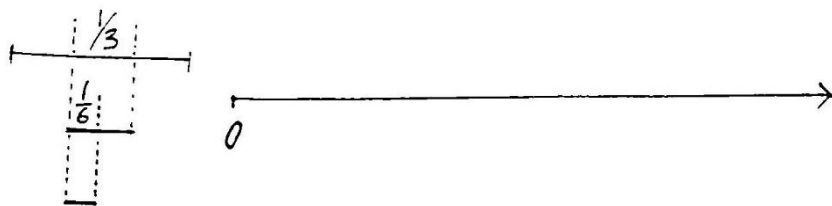
數線上用等分單位劃出的刻度 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{2}$ 等，通通叫做分數。也就是說二分數、三分數、四分數等，通稱為分數。

[課堂活動]

說出以下分數： $\frac{5}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{1}$ 。

[隨堂練習 2]

圖六把 $\frac{1}{3}$ 單位平分兩段，六段湊成一整個單位，所以每段就是 $\frac{1}{6}$ 單位。請在數線上劃出跟 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{5}{3}$ 、2、 $\frac{5}{2}$ 等值的「六分數」，並且標示刻度 1, 2, 3。



〔圖六〕

隨喜練習

把以下 48 個數，分成等值的 24 組。例如 $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{6}{6}$ 是一組， $\frac{1}{4}$ 本身是一組。

1, 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{3}$,

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{12}{4}$,

$\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{14}{6}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{16}{6}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{18}{6}$.