

1 負數〔教學說明〕

教學目標

本篇作為「認識負數」的第一課，目標在於負數的「識讀」。

知

數有分「正」、「負」，過去學習的「正數」不必特別說／寫出「正」，新學到的「負數」則一定要說／寫出「負」。完整數線應包括負數，負數在數線上的排列規則。溫度計的刻度是負數與數線的具體心像。

行

負數符號的聽說讀寫。正數不必寫／說出正號。作為一個數，「+3」就是 3，要讀正 3 而不是加 3，相對地「-3」要讀負 3 而不是減 3。

識

為何需要負數？因為有些「性質」量不會「沒有」，而且它可以比零更小。溫度和資產是兩個具體範例。

主要設計理念

1. 負數的引入，在認知程序上應比照自然數，從「識數」開始。
2. 第一節的標題「比空無還小的數」是一個「隱喻」，盼能引起學生對本文主題的注意。初步認識負數發生於何種情境中，它有何必要？如何用符號表示？我們在這標題中使用「小」而非「少」，預留伏筆讓負數可以比較大小。
3. 數學作為一種語言，應先學會負數的符號記法與國語讀法；也就是希望最先能習得負數的聽說讀寫。其中「聽」與「說」有賴教師在課堂中執行：請搭配隨堂練習、課堂活動，讓學生有機會「聽」與「說」負數。
4. 國中的「認識負數」與國小低年級的「識數」教學之主要差異，在於學生的生活經驗不同。故國中可以用溫度計舉例，並且可以用數線協助建立概念心像。
5. 「負」的概念那一節欲使用非正式的橋接語言，讓抽象的數學語言可以漸漸浮現。
6. 課堂活動的重點是正確的讀出正數與負數。試想，學生學到負數之前，其實也沒有正式學過「正數」。如文本所說，「正」的觀念是隨著「負」而一併出現的。
7. 此份文本的教學，在歐美經常設計於 5 年級，我國學生沒有理由不能在 5 年級完成此段學習。作者們無力在 5 年級做教學實驗，但呼籲有興趣的教師同仁／家長，讓 5 年級學生試試看。

教學備忘

1. 簡單溫度計的單價格僅約 30 元，筆者買了一批打算分給每班一支。建議教室裡固定放一支溫度計，雖然沒機會看到負的溫標，但是畢竟提供一項很簡單而實用的教具。



- 若有學生問起，可以介紹 F 是華氏溫標。從溫度計看得出來攝氏和華氏溫度可以互換，就像英吋和公分兩種長度可以互換一樣。以後會教到它們的互換。
- 溫度計刻度是負數與數線的具體物，宜盡量善用它們來建立負數與數線的概念心像。
- 本文不把「畫數線」與「在數線上標示負數」當作目標，把它們列為後續學習內容；本文聚焦在「認識負數」。
- 如果時間與氣氛許可，不妨讓學生有機會多舉幾個「性質量」和「物質量」的例子。
- 練習 2 第 (2) 小題的意思是要學生「數數看」有幾個間隔，切勿引入算式。
- 關於運算中的負數意義，以及負數所具備的對稱性等，都不屬於本文的目標。所以雖然提到相對概念，但是重點是正確地讀／寫正數，所以暫時沒有 $-(-3)$ 的討論。
- 「消失的一元」的參考表格如下

三兄弟（付出）	老闆（收到）	服務生（收到）
$9 \times 3 = 27$ 元	25 元	2 元

可見付出等於收到，所謂「收支平衡」，三兄弟付出的 27 元拆成 25 元和 2 元，分別給了老闆和服務生，並沒有任何錢消失了。

如果時間許可，應讓學生討論友誼錯在哪裡？他錯在「正負不分」也就是把不同性質的數加在一起了。若將「付出」定為負，「收到」定為正，則三兄弟在這筆交易中的資產是 -27 元，服務生是 2 元， $(-27)+2$ 並不等於 -29 。至於「原來的 30 元」，因為每人已經各取回 1 元，所以變成共付出 27 元，用算式來寫就是 $(-30)+3=-27$ 也是沒錯的。學生此時若還不會算式，則用語言解釋即可。

- 「隨喜練習」可以當作課後作業，也可以當作更多的課堂練習。

教學素養

許多教科書在此提供「負數歷史」文字框，彷彿已成慣例。如果這些歷史不能像「故事」一樣引起學生興趣，並且自然記得部份情節，否則將它們寫在教材裡，不知道究竟有什麼意義？對教師而言，有意義的「數學教學素養」可能不僅是「知道」中國早在《九章》就提出了正負數混合運算的規則而已，而是從這項史實獲得什麼見識？

所謂《九章》是將數學分成九大類的應用問題，其中僅在〈方程〉那一章（類）涉及正負數混合運算，其他八章（類）不但無此技術，甚至沒有負數。所謂「方程」是指二元一次聯立方程式，可以推廣到三元或更多元。其實我們並不能說〈方程〉具備了「負數」觀念，因為所有方程還是僅討論正數解，可見「負數」本身並不被認可，這一點，跟阿拉伯和歐洲文明的方程概念相同。〈方程〉之所以涉及正負混合計算，是因為求解的過程——不論代入消去法還是加減消去法——會涉及正負混合計算。各位老師只要想一下求解二元一次聯立方程式的程序就明白了。

了解這項史實之後，數學教師可以獲得的見識（啟發）之一，可能是以下概念：

使得正負混合計算有其自然被需要的情境，最初就發生在求解方程的時候。

這意味著，第一，在「方程」登場之前，正負混合運算是沒有動機的刻意練習，沒有情境的支持，因此學生無法感受它的需求，所以也就比較難「有感」地學習它。第二，理解正負混合計算的最

初／最基本目的是求解方程，從這個眼光來看，則更能掌握正負混合運算「刻意練習」的適當複雜程度。如果從這個角度來看，則我國教科書／參考書裡的正負混合運算，可能教得太早，而且過度複雜。

這原是中國典籍傳下來的重要數學教育訊息，卻讓西方人先拿去用了；其實，他們很可能是從務實的課程設計經驗中學到的，而不是受《九章》啟發的。許多歐美課程在 5 年級初步認識負數，只做基本的加減混合運算（有情境可搭）。6 年級則引進方程，在那裡才講「負負得正」以及一般性的正負混合運算；也就是說，正負混合運算是搭配著方程一起學的。我國在 7 年級才認識負數，這一點可能太遲了；剛認識就馬上做正負混合計算，這一點又可能太急了。所謂「進退失據」就是這個意思。

這本《別冊》無力改變課綱，也不能改變學校裡按照教科書的教學與段考進度。但我們會按照以上理念來規劃《別冊》的正負數與方程教學進度。我們僅能呼籲教師：基本上按照教科書進度授課，但是在正負混合計算的練習與評量（段考）上，適度調整學習坡度，移除教學成效可能較低的複雜計算。請參閱〈精熟與刻意練習〉<http://shann.idv.tw/edu/210112.html>，那裡寫了更具體的例子。

至於教師是否知道「籌算」乃至於「珠算」如何執行正負混合計算？我認為這項額外的知識與技能，是額外的個人興趣，值得追求與研究，但是難以想像它與國民教育的教學實踐有何連結？作為一名教師，帶領學生操作現代計算工具——手持行電算器、智慧型手機裡的計算 App、電腦裡的計算軟體——使得學生藉那些工具更加清晰地掌握數學概念、更加有力地運用數學解決問題，應該是更急需的數學教師素養。

當然，如果有學生對上述歷史技術產生主動的求知慾，則教師應該予以支持與指導。