5 質因數分解

我們已經知道 $(3,7)$ 是 21 的一對因數，也就是說 $21=3\times 7$ 是 21 的一種**分解**，或者說是一種**因數分解**。簡單說，質數就是「不可分解的數」，因為它除了 (1, 全) 這一對無聊的因數以外，沒有別的因數了。所以，把數分解成質因數相乘，有特殊的好處，例如「唯一性」（稍後解釋）。

先學一些國文：當因數也是質數的時候，就稱它為**質因數**。假如因數分解當中的每一個因數都是質因數，就說它是**質因數分解**。例如 $21=3\times 7$ 是質因數分解，但 $36=6\times 6$ 就只是因數分解，不是質因數分解。數學「規定」：(1) 不做 1 的因數分解，因為 1 是單位，沒必要討論它的分解；(2) 質數的因數分解就是它的質因數分解，也就是它本身，例如 17 的質因數分解就是 $17=17$，注意不要寫出 1×17，因為 1 不是質數。

迭代短除法

我們再規定：因數分解的乘法當中，因數要從小排到大。那麼，質因數就只有一種，例如 21 只有一種分解：$21=3\times 7$，但是 36 卻有多種因數分解，包括 $36=2\times 18$、$36=3\times 12$、$36=4\times 9$、$36=6\times 6$。

之前我們看過的因數分解，都簡單分解成一對因數（兩個因數）。現在要知道，三個因數、四個因數或更多因數連乘，也是因數分解。例如先把 36 分解成 $36=2\times 18$，再把 18 分解成 $18=2\times 9$，就可以把 36 分解成 $36=2\times 2\times 9$。同理，再把 9 分解成 $9=3\times 3$，就可以進一步把 36 分解成 $36=2\times 2\times 3\times 3$。在最後的分解中，2 和 3 都是質因數，所以 36 的質因數分解是 $36=2\times 2\times 3\times 3$。

$$
\begin{array}{r|l}
2 & \underline{54} \\
3 & \underline{27} \\
3 & \underline{9} \\
 & 3
\end{array}
$$

我們用**迭代短除法**做質因數分解。其中「迭」讀作「蝶」，是「一而再，再而三」的意思。迭代短除法可以不寫出每一步驟的餘數，把餘數記在心裡。而且，不整除的情況就跳過，不要寫下來。以 54 的質因數分解為例，我們依序嘗試除以質數。先嘗試 $54\div 2$，可以整除得到 27，也就是 $54=2\times 27$。接著嘗試分解 27。顯然 2 不整除 27，嘗試 $27\div 3$，整除得到 9，也就是 $54=2\times 3\times 9$。顯然 9 不是質數，我們輕易心算 $9=3\times 3$，所以 54 的質因數分解就是 $54=2\times 3\times 3\times 3$。完成迭代短除法之後，寫在除式外側的質數，就是全部的質因數。

[隨堂練習 1]

試用做以下各數的質因數分解： 57、91、41、60、100。請注意在分解的連乘當中，質因數的順序要從小排到大。如果能心算，就不必使用迭代短除法。

次方

我們已經知道，同一個數的連續自加，可以簡記為乘。例如 $3+3$ 簡記為 3×2，$3+3+3+3+3+3+3$ 簡記為 3×7，數學寫 $3+3=3\times 2$、$3+3+3+3+3+3+3=3\times 7$。現在要學：同一個數的連續自乘，可以簡記為**次方**。例如 3×3 是 3 自乘 2 次，簡記為 3^2，讀作 3 的 2 次方；$3\times 3\times 3$ 是 3 自乘 3 次，簡記為 3^3，讀作 3 的 3 次方；依此類推，$3\times 3\times 3\times 3$ 簡記為 3^4，讀作 3 的 4 次方。

我們也知道：乘法只是簡記的記號，除非背誦九九乘法表，否則並不能立刻算出乘式。例如除非記得九九表，否則並不能立刻算出 3×7 等於 21。次方就好像乘法，它也只是簡記的記號，它本身並不能算，除非背誦次方的答案。例如同學們應該背誦 $3^2=9$ 、$3^3=27$ 、$3^4=81$ 。

再來點國文：2 次方又稱**平方**，3 次方又稱**立方**，4 次方以上就沒有別名了。在 3^4 當中，寫在下方的 3 稱為**底數**，寫在右上角的 4 稱為**指數**。

[課堂活動]
讀出以下算式： 7^2 、9^2 、5^3 、6^3，每個算式都有兩種讀法。然後，請指出這些算式的底數是哪些？指數是哪些？最後，請算出答案。

[課堂活動]
同學們將會特別常用 2 的次方，請計算 2^2 、2^3 、2^4 、...、2^{10} 。背起來。

數學規定某數的 1 次方就是那個數自己，例如 $2^1=2$ ，$3^1=3$ ，當然 $1^1=1$ 而且 $0^1=0$ 。

標準分解式

用次方簡記質因數分解，而且規定質因數要從小排到大，就稱為**標準分解式**。例如 36 的質因數分解是 $36=2\times2\times3\times3$ ，它的質因數 2 出現 2 次、3 出現 2 次，所以 36 的標準分解式就是 $36=2^2\times3^2$。同理，54 的質因數分解式是 $54=2\times3\times3\times3$，所以 54 的標準分解式是 $54=2^1\times3^3$；但指數是 1 時可以省略不寫，所以 54 的標準分解式也可以寫成 $54=2\times3^3$ 。

類似地，21 的標準分解式可以寫成 $21=3\times7$ ，19 的標準分解式就寫 $19=19$ 。

[隨堂練習 2]
寫出以下各數的標準分解式： 57、91、41、60、100。

前面看過 36 有好幾種不同的因數分解，但是 36 只有一種標準分解式：$36=2^2\times3^2$ ，這就是質因數分解的好處之一：用質因數做的標準分解式是「唯一的」，它具有「唯一性」。

0 次方的意義

我們知道：100 以下的數，只要不被 2、3、5、7 整除就是質數。所以 2—100 的標準分解式一定可以寫成 $2^{\square}\times3^{\square}\times5^{\square}\times7^{\square}$ 或者再乘以一個大於 10 的質數。例如 $56=8\times7=2^3\times7$，其中 2 出現 3 次，7 出現 1 次，沒有 10 以上的質數。如果要把 56 寫成 $2^{\square}\times3^{\square}\times5^{\square}\times7^{\square}$ 的樣子，怎麼寫呢？因為 3 和 5 都沒有出現，它們就算出現 0 次，所以就把 3 和 5 的指數填入 0，也就是 $56=2^3\times3^0\times5^0\times7^1$ 。所以數學「規定」3^0 和 5^0 和所有質數的 0 次方都是 1，這樣才能使得 $2^3\times3^0\times5^0\times7^1=8\times1\times1\times7$ 得到 56。

依照前面說的規則，因為 $68=2\times34=2\times2\times17$ ，所以 68 寫成 $2^{\square}\times3^{\square}\times5^{\square}\times7^{\square}$ 形式就是 $68=2^2\times3^0\times5^0\times7^0\times17$ 。

[隨堂練習 3]
用 $2^{\square}\times3^{\square}\times5^{\square}\times7^{\square}$ 形式寫出以下各數的標準分解式：98、85、108。

數學延續「質數的 0 次方等於 1」的規定，後來也規定：只要底數不是 0，它的 0 次方就是 1。例如 1^0 、4^0 、6^0 、... 全都等於 1。但 0^0 就不是 1，這個情況要等到學過「微積分」才會知

道。就好像只要分母不是 0，它分之 0 就是 0，例如 $\frac{0}{1}$ 、$\frac{0}{2}$ 、$\frac{0}{3}$ 、... 全都等於 0。但 $\frac{0}{0}$ 就不是 0，這個情況也要等到學過「微積分」才會知道。

隨喜練習

列出以下各數的全部因數，然後列出它的全部質因數。（記得 1 不是質數）

(1) 45

(2) 64

(3) 175

(4) 220

(5) 284