

5 質因數分解〔教學說明〕

請先教導「國小銜接」第 1 課〈因數〉，因為本文引用了那邊創造的新教學法。我認為因數、質數是比較理想的迎接國中新生的數學第一單元，而負數應該挪到第二單元。如果按照前述理念，此課應該是《國中數學別冊》第 1 課。但是如果學校按照教科書的順序教學，還是只好先教負數，就把本篇安排在第 5 課。

教學目標

表面上要完成質因數標準分解式的教學，實際上是想要引進次方運算與指數記號。也可以說是打算一魚兩吃。

知

- 把因數、質數觀念整合為質因數，把一對因數的分解延伸到標準分解式。
- 認識次方，能辨識指數、底數。
- 知道指數 1 可以省略不寫，知道非零的 0 次方規定為 1，知道自己還不知道 0^0 是什麼？

行

- 能做迭代的質數短除法。
- 能將大於 1 的數（無號整數）寫成質因數標準分解式。
- 能用次方、指數、底數溝通。
- 能做次方運算（直接算，不用指數律）。

識

- 了解指數 0 的意義，了解指數 1 可以省略不寫、指數為 0 的質因數可以整個不寫。
- （部份學生）了解「因數分解」和「質因數分解」的差異在於唯一性。

主要設計理念

1. 在國中階段，因數、質因數確有學習的必要，但是質因數標準分解式則無必要：它是一則純數學知識。因為課綱規定要教，所以必須教。為了讓這段不得不教的課程對國中數學有些意義，我主張用它引進「次方」。所以，表面上教的是質因數分解，骨子裡卻是要教次方符號，特別是 0 次方的意義。
2. 藉由次方教學，再次提醒：乘法只是記號，除非背誦九九乘法表，否則並不能因為乘式而簡化計算。由此可見「背誦」在數學素養之中，還是有一定的分量與價值。同理，某些基本的次方，也值得背起來。
3. 讀出算式很重要，能說出「底數」、「指數」也是重要的教學目標。這些學習活動必須由教師或家長驗收。
4. 要求學生以 $2^{\square} \times 3^{\square} \times 5^{\square} \times 7^{\square}$ 形式寫 100 以內的標準分解式，只是為了創造一個使用 0 次方的環境，讓學生有機會練習使用指數記號。這個「題型」沒有數學價值，只有教材教法的價值。學生習得指數記號之後，不要再練習這種形式。

5. 早點讓學生知道「微積分」這個名詞應該沒有害處。明白說出來現在還不知道 0^0 和 $\frac{0}{0}$ ，讓學生知道「不知為不知」應該也是素養。
6. 因為我對公因數、公倍數沒有創新的教學建議，所以就不在《別冊》寫它們了。

教學備忘

- 《別冊》不寫公因數、公倍數，僅提醒教師：(1) 請先讓學生明白學習公因、公倍數的需求，至少就是分數運算中擴分／通分、約分／化簡的需求。(2) 兩個、三個數並列的迭代短除法，稱為「併列短除法」。
- 「正整數有唯一的標準分解式」是很了不起的結論，稱為算術基本定理。可以告訴學生，有機會也可以說這個名詞，但是不要當作考題。
- 一般而言，因數分解不唯一，但質因數標準分解式是唯一的，此「唯一性」也是算術基本定理的核心價值。讀本寫出了這件事，但是刻意不予強調，原因是顧慮學生此時的認知還不能欣賞唯一性。教師可視班級狀況提醒這一點。
- 請不要以任何形式考 0^0 或 $\frac{0}{0}$ ，就算「不知道」或「無定義」也不要考。
- 在國中階段，其實只要知道「次方」即可，不需要正式介紹「指數」。過去的課綱（民國 91 至 107 年間）內容其實僅要求知道「指數」符號，但是教科書都自行發展了「指數律」教材，那是個「很不幸」的意外；請參閱後面的「教學素養」。從 108 課綱起，要將 7 年級關於指數的教學逐步拉回正軌。

教學素養

● 因數的個數

首先，因數、質數、質因數都在無號整數的範圍內討論（請看國小銜接第 1 課），所以請不要談「負因數」，討論「因數的個數」時，也不要將負因數算在內；這是早年臺灣（中國）的數學教師自己發明的問題，並不足取。

其次，因數的個數是質因數標準分解式的絕佳應用，同時也是指數觀念的應用、計數原理的應用，所以它不失為一道好例題。但是，七年級學生的認知能力未達此境界，請不要在七年級介紹此例。適宜的時機，是安排在十年級的排列組合單元；我希望以後的課綱可以把質因數標準分解式與因數的個數，都安排在十年級。國中教師如果想要教此例，適合在九年級總複習的時候，視班級情況而提出此例。

● 1 不是質數的另一種解釋

假如 1 是質數，那麼標準分解式就應該有以下形式： $1^{\square} \times 2^{\square} \times 3^{\square} \dots$ 。這顯然是無聊的，因為 1 的任何次方都還是 1，它破壞了「唯一性」，而且對於乘在一起的結果沒有任何影響。規定 1 不是質數就避免掉這個無聊的狀況。

● 國中階段的指數

知道次方運算就好了，為什麼要特別說出「指數」呢？因為需要用它溝通，有時候我們必須明確說出次方算式裡的「上面」那個數；就好像「乘數」和「被乘數」一樣，這些名詞的存在，是為

了溝通。但是，「指數」的特殊需求，在於有一種「函數關係」，變化的不是底數，而是指數。例如冪函數 $x \mapsto x^2$ 是比較早學到的函數關係，相對地， $x \mapsto 2^x$ 這種對應關係，是比較晚學到的（高二），它叫做指函數。到了學習「指數律」和「指函數」的時候（不管哪個先發生），才真正需要用到「指數」這個名詞。在國中階段，因為並沒有那兩者的（真正）需求，其實學生只要知道次方符號即可，不需要特別知道「指數」；即使知道，也僅用來溝通「上面的數」以便分辨「底數」。

國中階段唯一「接近」需要指數律的地方，在平方根的化簡。例如 $\sqrt{32} = (2^5)^{1/2} = 2^2 \times 2^{1/2} = 4\sqrt{2}$ 。但是老師們應該都同意吧：為了這一點用途而使用指數律，實在太過「殺雞用牛刀」了吧？而國中階段確實需要指數記號，最明顯的位置就在於「正整數的標準分解式」。這一個課題的學習，需要指數記號，但是並不（真的）需要指數律。在民國 91 年以前的國中課程，基本上就是這樣設計的。多項式的乘法運算「疑似」出現指數律，但其實不必。諸如 $x \cdot x = x^2$ 、 $x^2 \cdot x = x^3$ 、 $x \cdot x^3 = x^4$ 、 $x^2 \cdot x^2 = x^4$ 等運算，用次方觀念即可，實在不必套用指數律。

那麼，民國 91 年的「九年一貫」數學課程為什麼加入指數律呢？簡單地說，那時候的總體課程開始關注「學科統整」，因此舉辦幾次全領域的大型籌備會議。在某次會議中，自然領域教師希望數學領域支援「科學記號」教學，而數學領域答應了。因此，科學記號進入 7 年級課綱。因為「標準分解式」本來就需要次方符號，也就是本篇所說的「指數記號」，所以將它應用在科學記號的 10^n ，應該不會對學生造成過多的額外負擔。自然領域需要我們幫忙的，只是科學記號數字的定義，以及它與普通記號數字的互化，他們並沒有要求數學課教導科學記號的計算；理化老師自己會在合適的情境中處理科學記號的計算。課綱委員知道科學記號裡的 10^n 並不是真的計算，而是小數點位置的記號，就如《別冊》第 4 課講的那樣。因此，其實數學課綱並沒有科學記號四則運算的需求，也沒有指數律的需求。「不幸」的是，課綱的書面文字寫得寬鬆，而且「分年細目」裡又舉了稍微靈活一點的例子，導致各版教科書競相加碼，而教科書審查委員面對各版教科書一致的設計時，容易傾向於接受他們的設計。因此，國中 7 年級上學期的數學課程，就陸續新增了完整的（整數）指數律，以及一般性的科學記號四則運算。這些內容，如作者一再解釋的，其實不適合作為國中階段的學習目標，尤其不適合放在第一冊。在第一冊，學生還在學習正負混合的整數與分數運算，實在不宜外加指數律與科學記號運算，加重學習的負擔且擾亂教學的脈絡。許多國中教師、校長察覺了這份沉重的負擔，因此在民國 105 年提出討論，促成了 108 課綱對這些課題的調整。

回顧民國 91 年以前的國中課程，檢視國際同儕國家的初中數學教材，都不會在國中階段（更不會在 7 年級）出現指數律與科學記號的四則運算。這些事實再次表示，我們不必擔心刪除這兩個主題會損失什麼。

● 指數的名稱來源

指數為什麼叫做「指數」？其實並沒有什麼大道理。指數與對數同時在明朝末年傳入中國（不是利瑪竇，是他之後的耶穌會神父），當時主要以實用的表格呈現。在表格的使用說明裡，教導了指數律與對數律。但是當時並沒有給它們正式名稱，而是依照實際需求，用「文言」敘述操作程序，於是出現「所指之數」與「所對之數」這些說法。後來就衍生了「指數」和「對數」這兩個習慣用語，經過晚清中國數學家與明治日本數學家的書寫，變成了專有名詞。

關於指數為什麼叫做「指數」，作者有一句話的教學。教師同仁可以參考看看。教學影片的網址是 <https://youtu.be/jykqqjsqykU>，或掃描右側二維條碼。只要看這支影片的前 30 秒即可。



如果不使用計算機，則次方只是純數學的記號，幾乎沒有實用價值。到了高中，次方運算的底數和指數都可能不是整數，那種情形，更加需要計算工具。因此，作者想要再次呼籲教師趁此機會讓學生有機會接觸計算機。我國因為長年忽視工具，所以確實缺乏應用次方運算的題目。這些題目有待教師們逐漸開發出來。