

## 16 直角坐標〔教學說明〕

### 教學目標

引介直角坐標，約定基本詞彙，搭配點坐標的判定而導入鉛直線與水平線，初識直線方程式。

#### 知

在坐標平面上，每個點皆有坐標。「 $x=1$ 」和「方程式」有兩種意涵。鉛直線平行於 $y$ 軸，水平線平行於 $x$ 軸，它們都有對應的方程式。

#### 行

能在坐標平面上判讀一點的坐標，能根據坐標指出坐標平面上的點。能寫出鉛直線、水平線的方程式，能根據「 $x=1$ 」或「 $y=2$ 」有這種形式的直線方程式，在坐標平面上畫出對應的圖形。

#### 識

直角坐標系是「發明」不是「發現」，它是西歐的數學引領其科技發展，最終強過世界其他各地的轉捩點。

### 主要設計理念

1. 單純的「直角坐標系」教學經常流於冗長枯燥，因此本課的設計是將點坐標的操作，融合鉛直線與水平線的操作，並且直接引進「直線方程式」，最為未來一般性直線方程式的前置經驗。如此一來，使得本課的「新名詞」相當多。請教師以新學期、新班級的「新同學」來類比這個狀況：我們都有一次接觸很多「新同學」的經驗，本來就不可能（沒必要）一次記得全部新同學，只要在學期當中經常相處，自然就會認識全班同學。
2. 學生在此課遭遇「 $x=1$ 」和「方程式」的第二義。就好像以前遭遇「 $-$ 」這個符號的第一義（減）和第二義（負）的類似經驗。按《別冊》的一貫主張：此時是教學的關鍵轉折點，需要特別小心地說清楚。
3. 108 課綱規定高一（10 年級）才講「直線方程式」，國中變成不准正式使用這個名詞。作者認為這是矯枉過正的作法，希望以後可以請課綱修訂同仁調整這一條規定。還好《別冊》畢竟不是正課，我們認為提早說這個名詞，對於學生建立解析幾何（坐標幾何）的概念是有幫助的。

### 教學備忘

1. 我國的國中數學習慣寫「座標」，高中數學卻習慣寫「坐標」。我猜想那是因為心測中心的數學試題寫「座標」，而大考中心的數學試題寫「坐標」。但是國家教育研究院規定的「官方」翻譯是「坐標」。《別冊》一律寫「坐標」，但是我們不介意別人寫「座標」。
2. 本課約定若干用語。但在教學上，並不需要刻意讓學生記憶這些詞彙。只要教師平常說的、寫的都是正確詞彙，則學生就能在自然環境中學會正確的語用。但是，有一組詞彙需特別注意，就是一點的「 $x$ 坐標」和「 $y$ 坐標」，它們是本課的教學重點之一，需要刻意說清楚。

- 請注意不要用「垂直線」來講「鉛直線」。因為「垂直」是兩條直線的關係，對於  $y$  軸而言，水平線也是垂直線。
- 一條直線的方程式並不唯一。例如  $x=2$  和  $2x=4$  是同一條鉛直線的方程式。但是，請教師 **不要主動**提及此事，也不需納入評量。這個觀念以後再說。
- 第 2 頁「直線  $L$  的特徵」希望能引領學生討論。最後的結論，可能不止一個，但是至少要能達到「直線  $L$  上任一點的  $x$  坐標皆為 2」這個共識——全班共識。這個觀念需要「 $x$  坐標」和「 $y$  坐標」這兩個詞彙，才能有效溝通。這就是為何這兩個詞彙在本課特別重要的原因。而以上共識是為了給「直線方程式」一個合理的存在理由。
- 雖然橫軸、縱軸不一定要是  $x$  軸、 $y$  軸，但是一般認為在國中階段還是鎖定在  $x$  軸、 $y$  軸比較有效。留待高中階段，再教學生更換橫軸、縱軸的變數符號。
- 因為像「 $x=1$ 」這種符號不止一種意義，所以當我們要學生知道它是直線方程式時，務必在前後文明白表述。大家都知道：「 $x=1$ 」甚至不止兩種意義，例如它還可能是平面方程式（在空間坐標系之內）。

### 教學素養

在 7 年級上學期，數學語彙並沒有使用「 $x=1$ 」指稱數線上坐標為 1 的點，當時也沒有稱數線為  $x$  軸 ( $x$  axis)。學生對「 $x=1$ 」這種符號的舊經驗是「一元一次方程式」的解。因此，現在學生相當於遭遇「一詞多義」的第二義了。就好像以前遭遇「 $-$ 」這個符號的第一義（減）和第二義（負）的類似經驗。《別冊》的基本教學理念，就是要特別注意這些詞義的轉銜與發展。「方程式」基本上是（含有符號的）equation（等式）的翻譯，例如  $2+3=5$  只是等式，不稱它為方程式，但  $x+3=5$  就稱為方程式了。可是方程式又分兩種：含未知數的等式（equation with unknowns），以及含變數的等式（equation with variables）。學到最後，它們是互通的，但是對初學者說清楚這兩者的異同，卻是教學成敗的關鍵之處。7 上學習的「一元一次方程式」屬於前者（含未知數），我們對這種方程式求解（solve the equation），現在開始接觸的直線方程式屬於後者（含變數），我們對這種方程式作圖（plot the equation）。

平面本無坐標。在沒有坐標的平面上討論圖形之間的關係（例如：平行線與截線形成各角之間的關係、三角形的全等或相似關係、圓與直線的關係），稱為平面幾何（plane geometry）。直角坐標系是西歐的一項偉大發明，一般歸功於法國人笛卡兒（René Descartes, 1596-1650）在 1637 年出版的一本書（詳細的故事沒這麼單純），所以西方稱直角坐標系為「卡氏坐標系」（Cartesian coordinate system），其中 Cartesian 是笛卡兒姓氏 Descartes 的所有格變形，意思就是「笛卡兒的」。後來的抽象數學已經發展到：任意兩條相交的直線皆可形成平面坐標系，但那是一般化的坐標系，「卡氏坐標系」專指互相垂直的坐標系。建立了坐標系的平面，稱為坐標平面（coordinate plane），在它上面討論圖形之間的關係（例如：兩直線的交點、圓與直線的關係、三角形的重心），稱為坐標幾何（coordinate geometry）或解析幾何（analytic geometry）；但是這兩個名稱在中學階段略有差異：當討論的幾何問題涉及切線、面積等概念時，也就是在方法上涉及微積分時，稱為解析幾何，否則為坐標幾何。

在坐標平面上，任一點都有一個唯一的直角坐標（rectangular coordinates），簡稱坐標（coordinates）；直角坐標有兩個元素： $x$  坐標、 $y$  坐標（ $y$ -coordinate）。在坐標平面上，直線、圓、橢圓、拋物線、雙曲線，皆有方程式，而所有二元方程式皆對應一個坐標平面上的圖形。三

## 16 直角坐標【教學說明】 1110219

角形、四邊形、正規多邊形等，雖然沒有方程式，但都有關於它們的周長、面積、重心等特殊點的坐標算法。以上就是中學階段坐標幾何的學習目標；它們並非全在高中完成，國中階段即可開始。《別冊》希望為國中、高中階段坐標幾何的學習，摸索一條前後連貫的、有效的課程設計。

天下本無坐標，坐標是人為的。所以，在平面上設立「有利的」坐標系，是數學思維的一個重要步驟。教師應在解題過程中，隨時提示學生這個思維的重要性與實用性。