

等值分數

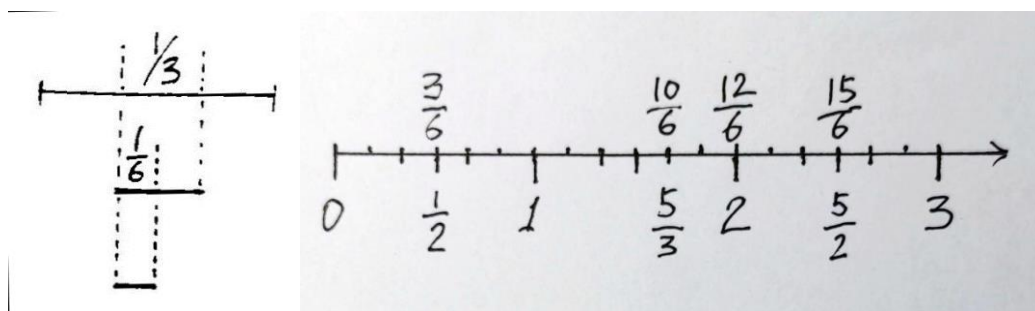
單維彰

上回，我好好地、慢慢地解釋了「數線」。在那裡，希望同學了解「分數」是「一個數」而不是寫在上面和下面的兩個數。這是需要花一些功夫去學習，然後習慣它的。同學們不容易把分數想成一個數的原因，可能受到國語的影響。舉凡 2、3、4 都只要說一個字，可是 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 卻要說四個字，感覺就不像一個數！其實 $\frac{1}{2}$ 有一個數詞：半，用「半」來說二分數可能比較容易把它們想成一個數，或者是一個單位；例如 $\frac{1}{2}$ 是一半， $\frac{2}{2}$ 是兩半， $\frac{3}{2}$ 是三半。

現在流行雙語教學。在數學裡順便學一點英文，有時候也對數學有幫助。國語只有 $\frac{1}{2}$ 的數詞，英語還有 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 的數詞： $\frac{1}{3}$ 是 one third， $\frac{1}{4}$ 是 one quarter。所以 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{3}$ 就是 two thirds、three thirds，而 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{4}$ 就是 two quarters、three quarters、four quarters。學會用這些「白話」說分數，可能比較容易感覺每個分數都是一個數。

當然，對於分數最正當的想法，還是數線上的刻度。每個分數都是「一個」刻度，所以它是一個數。但是有些表面看起來不一樣的分數，卻是同一個刻度，例如 $\frac{2}{2}$ 、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{4}{4}$ 都跟 1 是同樣的刻度，我們就說 $\frac{2}{2}$ 、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{4}{4}$ 是等值分數，它們都等於 1，數學說 $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = 1$ 。

我們利用圖一略為複習分數和等值分數：把單位長先平分三段，再把其中一段對半分，那麼六個小段就會湊成一整個單位，所以每小段是 $\frac{1}{6}$ 。用這一小段可以劃出 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{2}{6}$ 、 $\frac{3}{6}$ 這些「六分數」的刻度，圖一展示跟 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{5}{3}$ 、2、 $\frac{5}{2}$ 等值的六分數。



〔圖一〕

「等值分數」是這一回的主角，希望同學確實認識它們。所以請嘗試以下練習。

把以下 48 個數，分成等值的 24 組。例如 $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{6}{6}$ 是一組， $\frac{1}{4}$ 本身是一組。

1, 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{3}$,

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \frac{12}{4},$$

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, \frac{12}{6}, \frac{13}{6}, \frac{14}{6}, \frac{15}{6}, \frac{16}{6}, \frac{17}{6}, \frac{18}{6}.$$

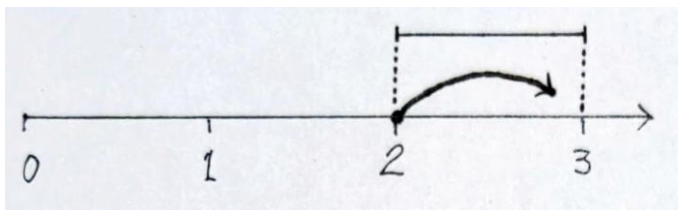
數線上的加減

等值分數有什麼用？用途之一是幫忙我們做分數的加減。那分數又為什麼要加減？這種需求經常發生，只舉一個例子：同學將要處理方程式和函數，有時候「變數」必須「代入」分數，這時候就經常要做分數的加減。

同學肯定都會算 $2+1$ 和 $2-1$ ，現在要請各位了解「加」和「減」在數線上是什麼意思？這裡有兩個關鍵：

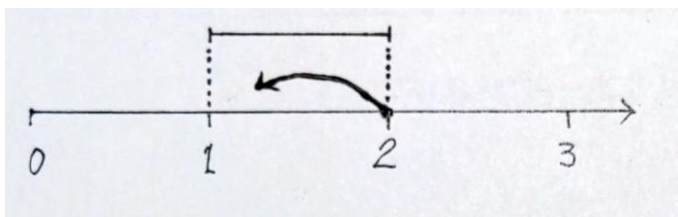
1. 「數」本來是數線上的刻度，但是它可以搖身一變，成為長度：就是從 0 到刻度的線段長。
2. 畫在數線一側的箭頭，表示正常方向，簡稱「正向」；同學不妨把有箭頭那一側想作「前」，而沒有箭頭那一側想作「後」。

在數線上， $2+1$ 的意思是：想像一個點，從刻度 2 開始，向前走 1 單位，它抵達的位置刻度就是 $2+1$ 的結果。如圖二，顯然那個點落在刻度 3 的位置，所以數學說 $2+1=3$ 。在 $2+1$ 裡面，「+」號前面的數表示刻度，「+」號後面的數表示長度。



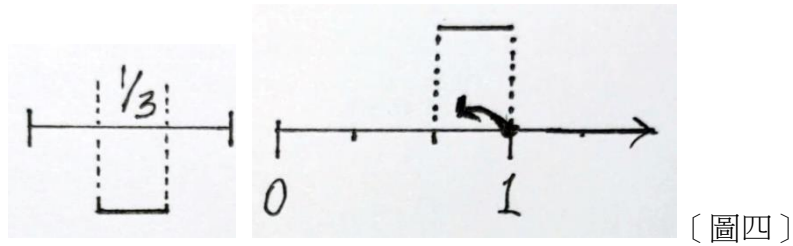
〔圖二〕

同學可能已經猜對了：在數線上， $2-1$ 的意思是想像一個點，從刻度 2 開始，向後走 1 單位，它抵達的位置刻度就是 $2-1$ 的結果。如圖三，顯然那個點落在刻度 1 的位置，所以數學說 $2-1=1$ 。同樣地，在 $2-1$ 裡面，「-」號前面的數表示刻度，「-」號後面的數表示長度。



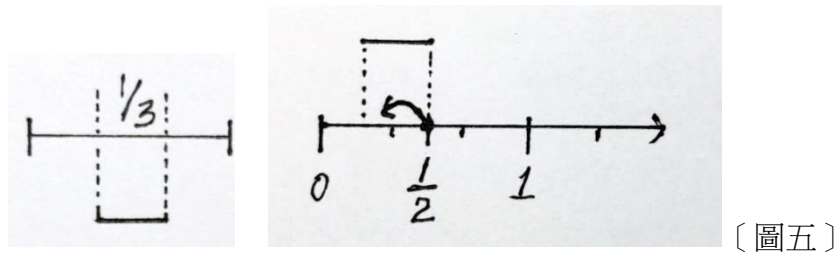
〔圖三〕

分數加減也是同樣道理。例如 $1-\frac{1}{3}$ 是從刻度 1 開始，向後走 $\frac{1}{3}$ ，抵達的刻度就是答案。從圖四可以清楚看到抵達刻度 $\frac{2}{3}$ ，所以數學說 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 。



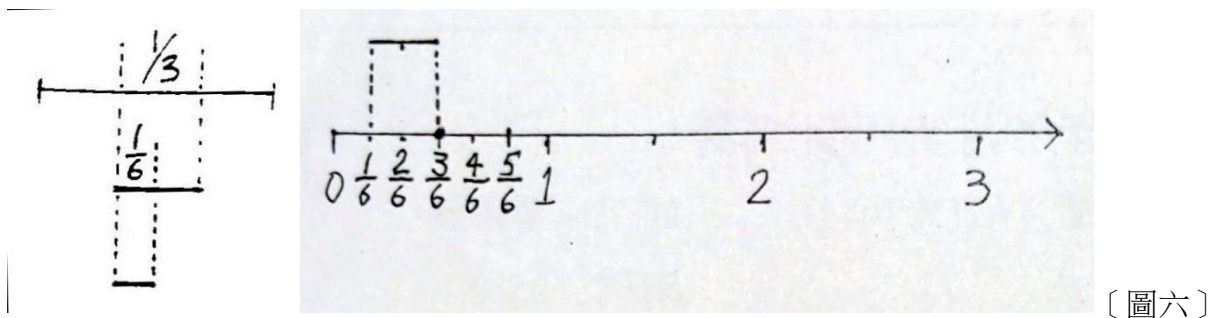
〔圖四〕

但是 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ，如圖五，可就不容易直接看清楚抵達的刻度。像這種情況，就要呼叫等值分數出來幫忙。



〔圖五〕

從圖一和前面的練習，我們已經注意到六分數將會成為二分數的等值分數，同時也會成為三分數的等值分數，也就是如果把每單位等分六段，就會讓我們看清楚 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ 的落點在哪裡？參照圖六，如果使用六分數刻度，就看清楚 $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ ， $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ，所以 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ 相當於從第 3 小段向後走 2 小段（每個小段是 $\frac{1}{6}$ ），抵達第 1 小段，也就是刻度 $\frac{1}{6}$ 的位置；所以數學說 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 。



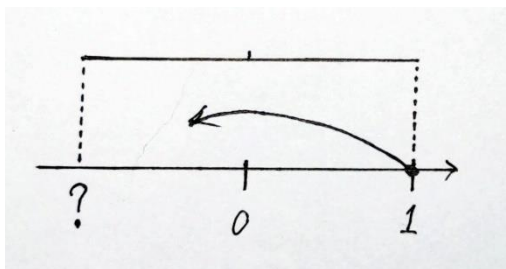
〔圖六〕

〔致編輯：請縮短圖六的數線長度，跟圖五一樣，畫到大約 1.5 的刻度即可〕

數線上的加減，讓我們認清加、減究竟是什麼意思？但是，實際計算的時候，在數線上畫刻度真的太麻煩。這就是為什麼學校裡要教「通分」，因為通分讓我們快速使用等值分數來做分數的加減。而通分的基本動作是找分母的「公倍數」，這就是為什麼學校裡要教「因數與倍數」。

負數

在數線上做減法的時候，假如向後走超過了 0 怎麼辦？例如 $1 - 2$ 意思是從刻度 1 開始，向後走 2 單位，會抵達哪裡呢？小學的數線，在 0 的後邊就沒了，但是小學生也知道直線可以向前後兩個方向任意延長。所以，沒必要限制數線只有「半條」。如圖七， $1 - 2$ 將會抵達 0 的左邊某一點。這一點的刻度，就是「負數」。負數是國小沒有的東西，它是國中生要開始探險的新世界。



〔圖七，請幫我把數線兩側都延長一點〕

「負數」有用嗎？它肯定有用，不然學校就不必教。負數有什麼用？且聽下回分解。